ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 7 | Oktober 1927 | Heft 5

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Ein Beitrag zur Gitterströmung.

Von **H. STEUDING** in Breslau.

Anläßlich der Flugversuche mit dem Windradflugzeug von de la Cierva in Spanien und bei dem wachsenden Interesse daran im Inlande [1]) schien es mir von einiger Bedeutung zu sein, die Kutta-Joukowskische Potential-Strömung um ein Einzelprofil auf ein Profilgitter zu übertragen, da es wohl erlaubt ist, die aufeinanderfolgenden Flügel der rotierenden Tragschraube als ein solches Gitter aufzufassen. Hierbei ging das Bestreben dahin, neben der Ermittlung des theoretisch möglichen Auftriebes oder Schraubenschubes und des Einflusses der Gitterkonstanten (Flügelbreite : Flügelabstand) auf diesen zu untersuchen, ob nicht auch die Profilform selbst und die übrigen Abmessungen der Schraubenflügel bereits durch die reine Theorie der Potentialströmung ohne Zuhilfenahme empirisch gefundener Konstanten eindeutig bestimmt werden. Als Ergebnis stellt sich heraus, daß durch nur zwei vorgegebene charakteristische Größen, die in der Arbeit näher definiert werden: die Beaufschlagung δ der Schraube und eine Zahl β_1, welche die Art der Schraube (Treib-, Hub- oder Gleitschraube) angibt, die Gitterkonstante und die Profilform vollkommen festgelegt sind, so daß nur die Flügelanzahl unbestimmt bleibt. Ueberträgt man die hier abgeleiteten allgemeinen Formeln auf die Schraube, so erhält man für den Schraubenschub S den Ausdruck

$$S = \frac{\gamma}{2\,g}\int_0^R 2\,\pi\,r\left[(r^2\,\omega^2 - v^2)\,A + 2\,v\,r\,\omega\,B\right]dr$$

und für das Drehmoment M

$$M = \frac{\gamma}{2\,g}\int_0^R 2\,\pi\,r^2\left[2\,v\,r\,\omega\,A - (r^2\,\omega^2 - v^2)\,B\right]dr,$$

[1]) Vgl. z. B. Zeitschr. f. Flugtechnik, 1926, S. 69 u. 483.

wo v die Fortschreitungsgeschwindigkeit und ω die Winkelgeschwindigkeit bedeuten. A und B werden durch die Beaufschlagungsgröße δ wie folgt festgelegt

$$A = \frac{2\,\delta\,[4\,\delta + (1+\delta^2)\sqrt{2+\delta^2}]}{[1+\delta^2+\delta\sqrt{2+\delta^2}]^2}, \qquad B = \frac{2\,\delta\,(1-\delta^2)\sqrt{2-\delta^2}}{[1+\delta^2+\delta\sqrt{2+\delta^2}]^2}.$$

Die andere charakteristische Größe β_1 ergibt sich aus

$$\beta_1 = \operatorname{arctg}\frac{v}{r\,\omega} + \operatorname{arctg}\frac{\delta\sqrt{2-\delta^2}}{2+\delta\sqrt{2+\delta^2}},$$

so daß nur durch Angabe der Fortschreitungsgeschwindigkeit v, der Winkelgeschwindigkeit ω und der Beaufschlagung δ eines Flügelelementes auch das Profil desselben festgelegt wird. Bei der Beschränkung auf die reine Potentialströmung waren selbstverständlich gewisse bereits bekannte Abweichungen von den wirklichen Verhältnissen zu erwarten, ebenso konnten verschiedene damit zusammenhängende wichtige praktische Fragen nicht beantwortet werden. So erhält man z. B. neben dem Verschwinden des Drehmomentes in bestimmten Lagen auch einen viel höheren theoretisch möglichen Schraubenschub. Der Vergleich mit Untersuchungen an ausgeführten Schiffsschrauben ergibt für A und B Werte zwischen 0,8—1,2, die einem δ noch unterhalb 0,05 entsprechen. Es ist jedoch anzunehmen, daß bei einer richtigen Wahl dieser letzten Größe sich für die Praxis brauchbare Profilformen ergeben.

Die Ableitung der obigen speziellen Formeln wird in der vorliegenden Arbeit nicht gegeben, indem sich diese nur auf den allgemeinen Fall der Uebertragung der Kutta-Joukowskischen Potentialströmung auf ein Profilgitter beschränkt.

Zu diesem Zweck wird zunächst die Strömungsfunktion für ein Kreisgitter, Abb. 1, aufgestellt und zwar gesondert für eine zum Gitter senkrechte, parallele und die Zirkulationsströmung.

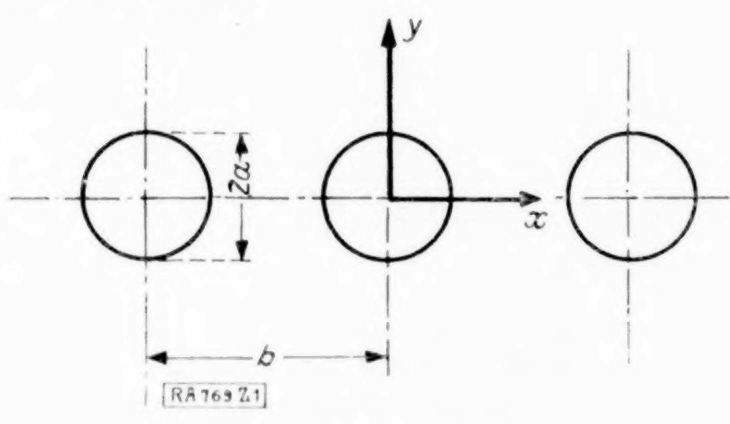


Abb. 1.

1. Zum Gitter senkrechte Strömung.

Wir betrachten die ebene Potentialbewegung einer idealen Flüssigkeit, die aus dem Unendlichen in der Richtung der y-Achse herkommt und gegen eine horizontale Reihe kreisförmiger Hindernisse auftrifft (Abb. 1). Die Halbmesser der Kreise seien a, die Abstände der Mittelpunkte b, das komplexe Potential $\Phi + i\,\Psi = W$. Die Staupunkte dieser Strömung befinden sich an den Punkten

$$\pm\, i\,a \pm n\,b$$

der komplexen z-Ebene, Abb. 1. Unter Anwendung des Weierstraßschen Produktsatzes läßt sich für die Ableitung der Strömungsfunktion $\frac{d\,W}{d\,z} = u - i v$, die an den Staupunkten einfache Nullstellen besitzen muß, vorläufig eine ganze transzendente Funktion aufstellen von der Form

$$G(z)\cdot\prod_{n=1}^{n=\infty}\Big[\Big(1-\frac{z}{nb+ia}\Big)e^{\frac{z}{nb+ia}}\Big(1-\frac{z}{nb-ia}\Big)e^{\frac{z}{nb-ia}}\Big(1-\frac{z}{-nb+ia}\Big)e^{\frac{z}{-nb+ia}}$$
$$\Big(1-\frac{z}{-nb-ia}\Big)e^{\frac{z}{-nb-ia}}\Big(1-\frac{z}{ia}\Big)e^{\frac{z}{ia}}\Big(1+\frac{z}{ia}\Big)e^{-\frac{z}{ia}}\Big].$$

Läßt man die willkürliche ganze Funktion ohne Nullstellen $G(z)$ vorläufig fort, so erhält man den Ausdruck

$$\Big(1+\frac{z^2}{a^2}\Big)\prod_{n=1}^{n=\infty}\Big(1-\frac{(z-ia)^2}{(nb)^2}\Big)\Big(1-\frac{(z+ia)^2}{(nb)^2}\Big)\frac{1}{\Big(1+\frac{a^2}{n^2b^2}\Big)^2},$$

den man leicht als die Produktenentwicklung der Funktion

$$\frac{\sin \pi/b\,(z+ia)\,\sin \pi/b\,(z-ia)}{\Big(\sin\frac{\pi\,i\,a}{b}\Big)^2}$$

erkennt. Damit im Unendlichen eine konstante Geschwindigkeit in Richtung der y-Achse sich ergibt, muß der letzte Ausdruck noch durch $\left(\sin\frac{\pi z}{b}\right)^2$ dividiert werden. Sieht man von der Konstanten im Nenner ab, so kann man schließlich $\frac{dW}{dz}$ in der folgenden Form ansetzen

$$u - iv = \frac{dW}{dz} = -iv_{y\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{b}(z+ia)\sin\frac{\pi}{b}(z-ia)}{\sin\frac{\pi}{b}z\cdot\sin\frac{\pi}{b}z} = -iv_{y\infty}\frac{\operatorname{Cof}\frac{2\pi a}{b}-\cos\frac{2\pi z}{b}}{1-\cos\frac{2\pi z}{b}} \quad (1).$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten u, v erhält man daraus

$$u = v_{y\infty}\frac{\sin\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Sin}\frac{2\pi y}{b}\left(1-\operatorname{Cof}\frac{2\pi a}{b}\right)}{\left(1-\cos\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)^2+\left(\sin\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Sin}\frac{2\pi y}{b}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$v = v_{y\infty}\frac{\left(\operatorname{Cof}\frac{2\pi a}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)+\left(\sin\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Sin}\frac{2\pi y}{b}\right)^2}{\left(1-\cos\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)^2+\left(\sin\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Sin}\frac{2\pi y}{b}\right)^2} \quad (3).$$

Für $y=\infty$ wird $u=o$, $v=v_{y\infty}$; für $z=\pm ia\pm nb$ wird $u=o$, $v=o$; für $x=o\pm n\frac{b}{2}$ wird $u=o$; für $y=o$ wird $u=o$; so daß alle Bedingungen für eine Parallelströmung in positiver Richtung der y-Achse erfüllt sind.

Die Strömungsfunktion W findet man durch Integration von $\frac{dW}{dz}$

$$W = -iv_{y\infty}\left(z-\frac{b}{\pi}\operatorname{Sin}^2\frac{\pi a}{b}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{b}\right) = \Phi + i\Psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und daraus die Potentialfunktion Φ und die Stromfunktion Ψ

$$\Phi = v_{y\infty}\left(y+\frac{b}{\pi}\operatorname{Sin}^2\frac{\pi a}{b}\frac{\operatorname{Sin}\frac{2\pi y}{b}}{\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\Psi = -v_{y\infty}\left(x-\frac{b}{\pi}\operatorname{Sin}^2\frac{\pi a}{b}\frac{\sin\frac{2\pi x}{b}}{\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Setzt man $\Psi=o$, so erhält man die umflossene Gitterkontur, die allgemein keine Kreiskurve ergibt. Durch Wahl einer geeigneten ganzen Funktion ohne Nullstellen, die anfangs weggelassen worden ist, könnte man eine beliebige Annäherung an den Kreis erhalten. Doch ergibt die folgende Zahlenrechnung, daß bereits die obigen Ansätze genügen. Mit wachsender Gitterkonstanten b wird diese Annäherung immer genauer und für den Grenzwert $b=\infty$ gehen die obigen Formeln in diejenigen der Strömung um den einzelnen Kreiszylinder über.

Für die zahlenmäßige Rechnung kann man die Gleichung (6) für $\Psi=o$ auf die bequemere Form

$$\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b} = \frac{\left(\operatorname{Cof}\frac{2\pi a}{b}-1\right)\sin\frac{2\pi x}{b}}{\frac{2\pi x}{b}}+\cos\frac{2\pi x}{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

bringen. Die gerechneten Zahlenwerte sind in den folgenden Zahlentafeln für verschiedene Verhältnisse a/b zusammengestellt. Die vorletzte und die letzte Spalte gibt die Abweichung vom Kreis $\frac{a}{b}-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{b}=\frac{\Delta r}{b}$ und $\frac{\Delta r}{a}$ an.

$\frac{a}{b}$	$\operatorname{Cof}\frac{2\pi a}{b}$	$\frac{x}{b}$	$\frac{2\pi x}{b}$	$\sin\frac{2\pi x}{b}$	$\cos\frac{2\pi x}{b}$	$\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b}$	$\frac{y}{b}$	$\frac{1}{b}\Delta r = \frac{a-\sqrt{x^2+y^2}}{b}$	$\frac{\Delta r}{b} : \frac{a}{b}$
0,1	1,20393	0,02	0,12566	0,12533	0,99211	1,19550	0,09801	∼ 0	∼ 0
		0,04	0,25132	0,24868	0,96858	1,17037	0,09168	∼ 0	∼ 0
		0,06	0,37699	0,36812	0,92977	1,12888	0,080	∼ 0	∼ 0
		0,08	0,50265	0,48174	0,87630	1,07174	0,05994	∼ 0	∼ 0
		0,1	0,62832	0,58778	0,80901	0,99977	∼ 0,0	. ∼ 0	∼ 0
0,2	1,89906	0,04	0,25132	0,24868	0.96858	1,85816	0,196	∼ 0	∼ 0
		0,08	0,50265	0,48174	0,87630	1,73790	0,183	∼ 0	∼ 0
		0,12	0,75398	0,684537	0,72996	1,54616	0,160	∼ 0	∼ 0
		0,16	1,00530	0,84431	0,53583	1,29081	0,119	0,0006	0,003
		0.195	1,22460	0,94066	0,33925	1,02977	0,0388	0,001	0,005
		0,199	1,2497	0,948888	0,31561	1,00541	0,0159	0,0005	0,0025
		0,2	1,2566	0,951031	0,30905	0,98941	—	< 0,001	< 0,005

$\frac{a}{b}$	$\operatorname{Cof}\frac{2\pi a}{b}$	$\frac{x}{b}$	$\frac{2\pi x}{b}$	$\sin\frac{2\pi x}{b}$	$\cos\frac{2\pi x}{b}$	$\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b}$	$\frac{y}{b}$	$\frac{\Delta r}{b}$	$\frac{\Delta r}{a}$
0,3	3,365916	0,06	0,37699	0,36812	0,92977	3,23977	0,294	∼ 0	∼ 0
		0,12	0,75398	0,684537	0,72996	2,8799	0,274	0,001	0,003
		0,18	1,1304	0,90458	0,42630	2,3163	0,237	0,003	0,01
		0,24	1,5072	0,99797	0,06354	1,6393	0,172	0,006	0,02
		0,29	1,8212	0,96941	− 0,24779	1,0109	0,0235	0,009	0,03
		0,295	1,8526	0,962004	− 0,30286	0,9255	—	—	—
0,4	6,21276	0,12	0,75398	0,684537	0,72996	5,46996	0,38	0,002	0,005
		0,20	1,2566	0,951031	0,30905	4,2696	0,339	0,006	0,015
		0,28	1,7584	0,985526	− 0,186496	2,7435	0,267	0,013	0,032
		0,36	2,2608	0,770216	− 0,63777	1,1383	0,0828	0,03	0,075
		0,365	2,2922	0,74982	− 0,66163	1,00302	0,012	0,035	0,087
		0,37	2,3236	0,72868	− 0,68484	0,949	—	—	—
0,5	11,59096	0,1	0,62832	0,58778	0,80901	10,739	0,488	0,002	0,004
		0,2	1,2566	0,951031	0,30905	8,359	0,448	0,008	0,016
		0,3	1,8849	0,953776	− 0,3081	5,062	0,368	0,025	0,05
		0,4	2,5132	0,586540	− 0,80990	1,0615	0,1745	0,063	0,126
		0,42	2,6367	0,481526	− 0,87642	1,0565	0,0533	0,08	0,16
		0,425	2,6690	0,453775	− 0,891111	0,9092	—	—	—

Für Gitter $a/b \leqq 0,1$ ist die umflossene Kontur beinahe ein vollkommener Kreis. Für $0,1 < a/b < 0,3$ ist die Abplattung des Kreises senkrecht zur Strömungsrichtung noch sehr gering und erst für fast ganz verdeckte Gitter $0,3 < a/b \leqq 0,5$ tritt die Abplattung stärker in Erscheinung.

2. Zur Gitterachse x parallele Strömung. In diesem Fall liegen die Staupunkte bei

$$\pm a \pm n b$$

der komplexen z-Ebene, Abb. 1. Dieselbe Betrachtung ergibt dann für $\frac{dW}{dz}$ den Ausdruck

$$\frac{dW}{dz} = u - i v = v_{x\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{b}(z+a)\sin\frac{\pi}{b}(z-a)}{\sin\frac{\pi}{b}z \cdot \sin\frac{\pi}{b}z} = v_{x\infty}\frac{\cos\frac{2\pi a}{b} - \cos\frac{2\pi z}{b}}{1-\cos\frac{2\pi z}{b}} \quad . \quad . \quad (8)$$

und für die Geschwindigkeitskomponenten u, v die Gleichungen:

$$u = v_{x\infty}\frac{\left(\cos\frac{2\pi a}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right) + \left(\sin\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Sin}\frac{2\pi y}{b}\right)^2}{\left(1-\cos\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)^2 + \left(\sin\frac{2\pi x}{b}\operatorname{Sin}\frac{2\pi y}{b}\right)^2} \quad (9),$$

$$v = -v_{x\infty} \frac{\left(1-\cos\frac{2\pi a}{b}\right)\sin\frac{2\pi x}{b}\,\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}}{\left(1-\cos\frac{2\pi x}{b}\,\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)^2+\left(\sin\frac{2\pi x}{b}\,\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10).$$

Für $y=\infty$ wird $v=0$, $u=v_{x\infty}$; für $z=\pm a \pm nb$ wird $u=0$, $v=0$; für $x=0\pm n\frac{b}{2}$ wird $v=0$; für $y=0$ wird $v=0$; so daß alle Bedingungen für eine Parallelströmung in positiver Richtung der x-Achse erfüllt sind.

Genau so findet man weiter durch Integration die Strömungsfunktion

$$W = v_{x\infty}\left[z+\frac{b}{\pi}\sin^2\frac{\pi a}{b}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi z}{b}\right] = \Phi + i\Psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

und daraus das Potential und die Stromfunktion

$$\Phi = v_{x\infty}\left(x+\frac{b}{\pi}\sin^2\frac{\pi a}{b}\,\frac{\sin\frac{2\pi x}{b}}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12),$$

$$\Psi = v_{x\infty}\left(y-\frac{b}{\pi}\sin^2\frac{\pi a}{b}\,\frac{\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13).$$

Auch hier ist die umflossene Kontur wie im vorhergehenden Falle annähernd ein Kreis mit demselben Grad der Annäherung.

Für die Zahlenrechnung erhält man aus (13) für $\Psi=0$ die Profilgleichung

$$\cos\frac{2\pi x}{b} = \mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b} - \left(1-\cos\frac{2\pi a}{b}\right)\frac{\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}}{\frac{2\pi y}{b}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

Die gerechneten Werte sind in der folgenden Zahlentafel zusammengestellt:

$\frac{a}{b}$	$\cos\frac{2\pi a}{b}$	$\frac{y}{b}$	$\frac{2\pi y}{b}$	$\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{y}$	$\mathfrak{Cof}\frac{2\pi x}{b}$	$\cos\frac{2\pi x}{b}$	$\frac{x}{b}$	$\frac{\Delta r}{b} = \frac{a-\sqrt{x^2+y^2}}{b}$	$\frac{\Delta r}{b}:\frac{a}{b}$
0,1	0,80902	0,1	0,6283	0,670142	1,203756	1,000	0	~ 0	~ 0
0,2	0,30962	0,197	1,2372	1,57789	1,8681	0,986	0,0266	$<0,001$	$<0,005$
		0,199	1,2497	1,60135	1,88795	0,9992	0,0063	$<0,001$	$<0,005$
		0,2	1,256	1,61327	1,8981	1,0081	—	—	—
0,3	− 0,30810	0,06	0,37699	0,3858	1,071834	− 0,2682	0,295	~ 0	~ 0
		0,12	0,75398	0,82699	1,29766	− 0,1423	0,273	0,0015	0,005
		0,18	1,1304	1,38699	1,7099	+ 0,1019	0,233	0,0055	0,018
		0,24	1,5072	2,1311	2,3539	0,504	0,166	0,008	0,027
		0,29	1,8212	3,00874	3,1705	1,0105	~ 0	0,01	0,033
0,4	− 0,8092	0,12	0,7539	0,826997	1,29766	− 0,7932	0,395	—	—
		0,20	1,256	1,61327	1,8981	− 0,432	0,321	0,02	0,05
		0,28	1,7584	2,725314	2,987688	− 0,1777	0,278	0,006	0,015
		0,35	2,198	4,44795	4,559	+ 0,9	0,0715	0,04	0,01
		0,36	2,2608	4,7433	4,84752	1,057	—		0,1
0,5	− 1	0,1	0,628	0,670142	1,203756	− 0,9363	0,445	0,04	0,08
		0.2	1,256	1,61327	1,8981	− 0,682	0,37	0.08	0,1
		0,3	1,884	3,21396	3,36585	− 0,044	0,258	0,104	0,2
		0,36	2,2608	4.74329	4,84752	+ 0,667	0,134	0,116	0,23
		0,37	2,3236	5,0573	5,13879	0.789	0,105	0,116	0,23
		0,38	2,3864	5,3912	5,48316	0,973	0,037	$<0,12$	$<0,24$
		0,4	2,512	6,1241	6,14449	1,275	—	—	

3. Zirkulationsströmung. Auch diese findet man in derselben Weise, wie die ersten beiden Strömungen, wenn man bedenkt, daß nun die Funktion $\frac{dW}{dz}$ in den Punkten $\pm b/2 \pm nb$ verschwinden muß. Die mit Hilfe des Produktsatzes gefundene Funktion:

$$\sin\frac{\pi}{b}\left(z-\frac{b}{2}\right)\sin\frac{\pi}{b}\left(z+\frac{b}{2}\right)$$

muß jedoch hier durch $\sin\frac{\pi z}{b}\cos\frac{\pi z}{b}$ dividiert werden, da für $y=\pm\infty$ die Geschwindigkeit ihr Vorzeichen wechseln muß. Daraus erhält man den Ansatz:

$$\frac{dW}{dz}=u-iv=+\frac{i\Gamma}{2b}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{b} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

und nach Integration:

$$W=+i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sin\frac{\pi z}{b}=\Phi+i\Psi \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die Geschwindigkeitskomponenten u, v erhält man zu

$$u=+\frac{\Gamma}{2b}\frac{\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}}{\mathfrak{Cos}\frac{2\pi y}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}} \quad . \quad (17), \qquad v=-\frac{\Gamma}{2b}\frac{\sin\frac{2\pi x}{b}}{\mathfrak{Cos}\frac{2\pi y}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}} \quad . \quad (18).$$

Für $y=0$ wird $u=0$; für $y=\pm\infty$ wird $v=0$ und $u=\pm\frac{\Gamma}{2b}$. Daraus erhält man für die Zirkulation Γ die Beziehung

$$\Gamma=2b\,u_{+\infty} \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Aus (16) erhält man das Potential

$$\Phi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{b}\operatorname{Tg}\frac{\pi y}{b}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

und die Stromfunktion

$$\Psi=\frac{\Gamma}{4\pi}\ln\left(\mathfrak{Sin}^2\frac{\pi y}{b}+\sin^2\frac{\pi x}{b}\right)=\frac{\Gamma}{4\pi}\ln\frac{1}{2}\left(\mathfrak{Cos}\frac{2\pi y}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}\right) \quad . \quad . \quad (21).$$

Auch hierfür sind die Konturen angenäherte Kreiskurven, die in der Richtung senkrecht zur Gitterachse abgeplattet werden, wie es der Strömung parallel zur Gitterachse entspricht.

Zusammenfassend wird man behaupten können, daß für ein Kreisgitter von $a/b\leqq 1$ die allgemeine Strömung in der Form

$$W=v_{x\infty}\left[z+\frac{b}{\pi}\sin^2\frac{\pi a}{b}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{b}\right]-i\,v_{y\infty}\left[z-\frac{b}{\pi}\mathfrak{Sin}^2\frac{\pi a}{b}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{b}\right]+i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sin\frac{\pi z}{b} \quad (22),$$

$$\frac{dW}{dz}=v_{x\infty}\frac{\cos\frac{2\pi a}{b}-\cos\frac{2\pi z}{b}}{1-\cos\frac{2\pi z}{b}}-i\,v_{y\infty}\frac{\mathfrak{Cos}\frac{2\pi a}{b}-\cos\frac{2\pi z}{b}}{1-\cos\frac{2\pi z}{b}}+i\frac{\Gamma}{2b}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{b} \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

angesetzt werden kann. Für $\lim a/b=0$ gehen diese Gleichungen in diejenigen der Strömung um einen einzelnen Kreiszylinder über. Für $a/b>1$ wird man für genauere Rechnungen die Verzerrungen des Kreises analog, wie es im Falle einer einzigen Kontur von v. Mises, Müller, Geckeler u. a. Autoren geschehen ist, berücksichtigen müssen.

Um nun die Strömung für Gitter mit Joukowski ähnlichen Profilen zu erhalten, kann man dasselbe Abbildungsverfahren benutzen, indem man erst eine Koordinatenverschiebung vornimmt, d. h.

$$z=z'-m \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

setzt und dann das verschobene Kreisgitter mit Hilfe einer analogen Abbildungsfunktion

$$\zeta=z'+\frac{b}{\pi}\sin^2\frac{\pi c}{b}\operatorname{ctg}\frac{\pi z'}{b} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

auf die ζ-Ebene konform abbildet. Die für die Zirkulation und den Auftrieb wichtigen Staupunkte $c\pm nb$ der kreisähnlichen Profile gehen dann in die hinteren Spitzen der Profile des neuen Gitters über, denn für $z'=c\pm nb$ wird

$$\frac{d\zeta}{dz'}=1-\frac{\sin^2\frac{\pi c}{b}}{\sin^2\frac{\pi z'}{b}} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

gleich Null. Bevor diese Rechnung weitergeführt wird, soll jedoch eine noch etwas allgemeinere Betrachtung eingeschoben werden.

4. Die verallgemeinerte Gitterströmung. Geht man nicht von den speziellen Stau- oder Nullpunktenpaaren $\pm i a \pm n b$ bzw. $\pm a \pm n b$ aus, sondern von beliebig gegebenen, Abb. 2,

$$z_1 \pm n b, \qquad z_2 \pm n b$$

und konstruiert dafür in derselben Weise mit Hilfe des Weierstraßschen Produktsatzes eine ganze transzendente Funktion, so erhält man nach Weglassung der diesmal noch hinzutretenden Faktoren und Division durch $\left(\sin \frac{\pi z}{b}\right)^2$ die Funktion

$$\frac{\sin \frac{\pi}{b}(z - z_1) \sin \frac{\pi}{b}(z - z_2)}{\left(\sin \frac{\pi z}{b}\right)^2}$$

Abb. 2.

und damit den Ansatz für $\frac{d W}{d z}$ in der Form

$$\frac{d W}{d z} = w_\infty \frac{\bar{z}_1}{r_1} \frac{\sin \frac{\pi}{b}(z - z_1) \sin \frac{\pi}{b}(z - z_2)}{\left(\sin \frac{\pi z}{b}\right)^2} = w_\infty \frac{\bar{z}_1}{r_1} \frac{\cos \frac{\pi}{b}(z_1 - z_2) - \cos \frac{\pi}{b}(2 z - z_1 - z_2)}{1 - \cos \frac{2 \pi z}{b}} \quad . \quad (27),$$

wobei $\bar{z}_1$ die Konjugierte von z_1, r_1 der Modul von z_1 und w_∞ der absolute Wert der Geschwindigkeit im Unendlichen sind. Die Strömungsfunktion W erhält man dann zu

$$W = w_\infty \frac{\bar{z}_1}{r_1}\left[z \cos \frac{\pi}{b}(z_1 + z_2) - \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi}{b} z_1 \sin \frac{\pi}{b} z_2 \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{b} - \frac{b}{\pi} \sin \frac{\pi}{b}(z_1 + z_2) \ln \sin \frac{\pi}{b} z\right] \quad (28).$$

Das letzte Glied stellt bereits eine verallgemeinerte Zirkulationsströmung dar, die durch die Wahl der Staupunkte bedingt wird, wodurch sich das Hinzufügen einer willkürlichen speziellen Zirkulation, wie im früheren Fall, von selbst erübrigt. Nimmt man symmetrische Staupunkte an, d. h. setzt man $z_2 = - z_1$, so verschwindet das letzte Glied und man muß wieder das frühere willkürliche Zirkulationsglied hinzufügen. Nimmt man die alten Staupunkte an, so erhält man wieder die vorhergehenden Lösungen.

Für die weitere Rechnung wird $\frac{d W}{d z}$ besser in der folgenden Form geschrieben

$$\frac{d W}{d z} = u - i v = w_\infty \frac{\bar{z}_1}{r_1}\left[\cos \frac{\pi}{b}(z_1 + z_2) + \frac{\sin \frac{\pi}{b} z_1 \sin \frac{\pi}{b} z_2}{\left(\sin \frac{\pi z}{b}\right)^2} - \sin \frac{\pi}{b}(z_1 + z_2) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{b} z\right] \quad (29).$$

Wird $z_1 = p_1 + i q_1$ und $z_2 = p_2 + i q_2$ gesetzt, so erscheinen die vier Konstanten p_1, q_1, p_2, q_2 als die Parameter, von deren Wahl die ganze Strömung abhängt.

Ueber die im Unendlichen konstante Geschwindigkeit, deren Komponenten $v_{x\infty}$ und $v_{y\infty}$ durch

$$v_{x\infty} = w_\infty \left[\cos \alpha \cos \pi/b(p_1 + p_2) \mathfrak{Cof}\, \pi/b(q_1 + q_2) - \sin \alpha \sin \pi/b(p_1 + p_2) \mathfrak{Sin}\, \pi/b(q_1 + q_2)\right] \quad (30),$$

$$v_{y\infty} = w_\infty \left[\cos \alpha \sin \pi/b(p_1 + p_2) \mathfrak{Sin}\, \pi/b(q_1 + q_2) + \sin \alpha \cos \pi/b(p_1 + p_2) \mathfrak{Cof}\, \pi/b(q_1 + q_1)\right] \quad (31),$$

mit $\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_1}{p_1}$ ausgedrückt werden, überlagert sich noch die Geschwindigkeit aus der Zirkulation mit den wechselnden Vorzeichen für $y = \pm \infty$, deren Komponenten $u_{x\infty}$ und $u_{y\infty}$ durch

$$\left.\begin{aligned} u_{x \pm \infty} = \mp w_\infty \big[& - \sin \alpha \sin \pi/b\, (p_1 + p_2)\, \mathfrak{Cof}\, \pi/b\, (q_1 + q_2) \\ & + \cos \alpha \cos \pi/b\, (p_1 + p_2)\, \mathfrak{Sin}\, \pi/b\, (q_1 + q_2)\big] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (32),$$

$$\left.\begin{aligned} u_{y \pm \infty} = \mp w_\infty \big[& \sin \alpha \cos \pi/b\, (p_1 + p_2)\, \mathfrak{Sin}\, \pi/b\, (q_1 + q_2) \\ & + \cos \alpha \sin \pi/b\, (p_1 + p_2)\, \mathfrak{Cof}\, \pi/b\, (q_1 + q_2)\big] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (33),$$

gegeben sind, und die bei einem Propeller den zusätzlichen Rotations- und Axialgeschwindigkeiten des Flüssigkeitsstrahles entsprechen. Wie in der Propellerstrahltheorie die

Zusatzgeschwindigkeiten zur Hälfte vor der Propellerebene, zur Hälfte hinter dieser erzeugt werden, so geben die Gleichungen (30), (31) die Geschwindigkeit in der Propellerebene an, die dann wegen der wechselnden Vorzeichen von Gleichungen (32) und (33) vor dieser verringert und dahinter vergrößert wird. Die gesamte Zusatzgeschwindigkeit, wie sie in der Propellertheorie eingeführt wird, ist demnach

$$-2\,(u_{x\infty} + i\,u_{y\infty}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34).$$

Den Auftrieb an einem Profil des Gitters erhält man nach **Grammel** zu

$$P_y + i\,P_x = \frac{\varrho}{2}\oint\left(\frac{d\,W}{d\,z}\right)^2 d\,z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35).$$

Die Auswertung des Integrals kann unter Anwendung des Residuumsatzes, indem man $\frac{d\,W}{d\,z}$ aus (29) in eine Reihe entwickelt und noch einfacher durch direkte Integration über die Berandung eines ganzen Periodenstreifens des Gitters von $-\infty$ bis $+\infty$ geschehen. Sowohl aus der einen, wie aus der anderen Rechnung erhält man

$$P_y + i\,P_x = 2\,b\,\varrho\,(v_{x\infty} - i\,v_{y\infty})\,(u_{x\infty} - i\,u_{y\infty}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

und daraus

$$P_y = 2\,b\,\varrho\,(v_{x\infty}\,u_{x\infty} - v_{y\infty}\,u_{y\infty}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37),$$

$$P_x = -\,2\,b\,\varrho\,(v_{y\infty}\,u_{x\infty} + v_{x\infty}\,u_{y\infty}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (38).$$

Multipliziert man die letzten Gleichungen mit der Flügelanzahl einer Schraube, so erhält man den Schub und die Umfangskraft für ein Ringelement derselben. An die Stelle der Gitterkonstanten b tritt dann der Kreisumfang, d. h. die Frage nach der zweckmäßigen Zahl der Flügel bleibt unbeantwortet, was auch sein muß, solange die Reibung unberücksichtigt bleibt. Da jedoch die Größe des Flügelprofils durch die Wahl von P_y und P_x bestimmt wird, so erhält die obige Frage aus Festigkeits- und praktischen Gründen auch ohne Berücksichtigung der Reibung eine Lösung. Bei der Konstruktion einer Schraube würde man also nach Ermittlung oder Angabe der Hauptdaten, insbesondere von P_y und P_x, die Form des Profils aus den Geschwindigkeitskomponenten $v_{x\infty}$, $v_{y\infty}$, $u_{x\infty}$, $u_{y\infty}$ oder den vier Parameter p_1, p_2, q_1, q_2 aus der zu (28) zugehörigen Stromfunktion

$$\Psi = y\,v_{x\infty} - x\,v_{y\infty} + \frac{b}{2\pi}\,\frac{(v'_{x\infty} - v_{x\infty})\,\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y}{b} + (v'_{y\infty} - v_{y\infty})\sin\frac{2\pi x}{b}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}}$$

$$+\,\frac{b}{\pi}\left[u_{x+\infty}\,{}^1\!/_2\,ln\,{}^1\!/_2\left(\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi y}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}\right) + u_{y+\infty}\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x}{b}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi y}{b}\right)\right] \quad . \quad (39)$$

finden. In Gl. (39) bedeuten $v_{x\infty}$, $v_{y\infty}$, $u_{x\infty}$, $u_{y\infty}$ die Geschwindigkeitskomponenten in $+\infty$ aus Gl. (30) bis (33); $v'_{x\infty}$ und $v'_{y\infty}$ erhält man, wenn man in Gl. (30) und (31) p_2 und q_2 durch $-p_2$ und $-q_2$ ersetzt.

Auch diese verallgemeinerte Gitterströmung liefert nur stark verzerrte kreisähnliche Konturen, die weiter abgebildet werden müssen, um die praktisch vorkommenden Profile zu erhalten.

5. Die Kutta-Joukowskische Gitterströmung. Fortsetzung von Punkt 3. Den Auftrieb an einem Profil des Kreisgitters erhält man durch Einsetzen von Gl. (23) in Gl. (35) in derselben Weise wie dort zu

$$P_y + i\,P_x = \varrho\,\Gamma\,(v_{x\infty} - i\,v_{y\infty}) \quad . \; . \quad (40)$$

und unter Berücksichtigung von Gl. (19)

$$P_y + i\,P_x = 2\,b\,\varrho\,(v_{x\infty} - i\,v_{y\infty})\,u_{x\infty} \; . \; . \quad (41)$$

und daraus

$$P_y = 2\,b\,\varrho\,v_{x\infty}\,u_{x\infty} = \varrho\,v_{x\infty}\,\Gamma \quad . \; . \quad (42)$$

$$P_x = -\,2\,b\,\varrho\,v_{y\infty}\,u_{x\infty} = -\,\varrho\,v_{y\infty}\,\Gamma \quad . \quad (43).$$

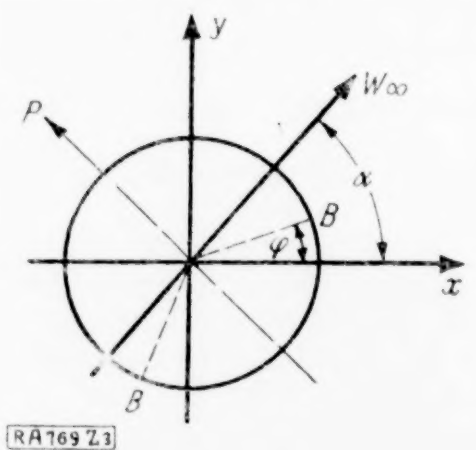


Abb. 3.

Zur Bestimmung der Zirkulation Γ hat man für den einzelnen Kreis, Abb. 3, vom Radius a mit den Staupunkten bei B und der Geschwindigkeit im Unendlichen w_∞ die bekannte Formel

$$\Gamma = 4\,\pi\,a\,w_\infty\,\sin(\alpha - \varphi) \quad . \; . \; . \quad (44).$$

Für den Vergleich mit Formel (19) wird diese in der Form

$$\Gamma = 2 b w_{\infty} \frac{2 \pi a}{b} \sin (\alpha - q) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

geschrieben. Für das Gitter wird die Beziehung zwischen den Staupunkten und der Zirkulation durch entsprechende Gleichungen, wie beim Einzelkreis, festgelegt

$$\frac{-v_{x\infty}\left[\left(1-\cos\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)\left(\cos\frac{2\pi a}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)+\left(\sin\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}\right)^2\right]+v_{y\infty}\left(\mathfrak{Cof}\frac{2\pi a}{b}-1\right)\sin\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}}{\left(1-\cos\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)^2+\left(\sin\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}\right)^2}$$

$$= \frac{\Gamma}{2b} \frac{\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b} \quad \cos\frac{2\pi x}{b}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

$$\frac{v_{y\infty}\left[\left(1-\cos\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)\left(\mathfrak{Cof}\frac{2\pi a}{b}-\cos\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)+\left(\sin\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}\right)^2\right]-v_{x\infty}\left(1-\cos\frac{2\pi a}{b}\right)\sin\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}}{\left(1-\cos\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b}\right)^2+\left(\sin\frac{2\pi x}{b}\mathfrak{Sin}\frac{2\pi y}{b}\right)^2}$$

$$= \frac{\Gamma}{2b} \frac{\sin\frac{2\pi x}{b}}{\mathfrak{Cof}\frac{2\pi y}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

die sich aber nicht geschlossen auflösen lassen.

Die folgenden Zahlenwerte sind so gefunden worden, daß der Staupunkt y, x in die Gl. (46) und (47) eingesetzt wurde, woraus sich der zugehörige Wert von Γ ergab. Eine Kontrolle hat man darin, daß beide Gleichungen denselben Wert von Γ liefern müssen, was ziemlich schwer zu erreichen ist. In der folgenden Zahlentafel, die für $a/b = 0{,}1$ berechnet wurde, ist dann das Mittel der beiden Werte eingesetzt.

$\frac{a}{b}$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	Einzelkreis Γ	Kreis im Gitter Γ
			1,0	0	$0{,}377\, w_{\infty}\, 2\, b$	$0{,}402\, w_{\infty}\, 2\, b$
0,1	0,8	0,6	0 9165	0,4	0,269 » 2 »	0,266 » 2 »
			0,98	0,2	0,144 » 2 »	0,146 » 2 »

Wie man sieht, sind für $a/b < 1$ und kleine Werte von Γ die Abweichungen gering.

Es bleibt nur noch zu zeigen, wie die Trefftzsche Konstruktion der Joukowski-Profile (Z. f. Flugtechn. und Motorluftschiff. 4, S. 130, 1913) auf den Fall des Gitters zu übertragen ist. Zu diesem Zweck wird die Abbildungsfunktion 25 in Reihenform dargestellt:

$$\zeta = z' + \frac{c^2}{z'}\left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{2\pi c}{b}\right)^2 + \frac{1}{360}\left(\frac{2\pi c}{b}\right)^4 - + \ldots\right] \frac{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi z'}{b}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi z'}{b}\right)^4 - + \ldots.}{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi z'}{b}\right)^2 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi z'}{b}\right)^4 - + \ldots.} \quad (48)$$

Bricht man die Reihen beim 2. Glied ab, so ist der Fehler für $a/b = 0{,}1$ von der Größenordnung

$$\frac{1}{360}\left(\frac{2\pi c}{b}\right)^4 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi z'}{b}\right)^4 - \frac{1}{120}\left(\frac{\pi z'}{b}\right)^4 = 7{,}55 \cdot 10^{-4}$$

und man erhält unter Vernachlässigung von Gliedern von derselben Ordnung

$$\zeta = z' + \frac{c^2}{z'}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi c}{b}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi z'}{b}\right)^2\right]$$

oder in einer noch bequemeren Form für die Zeichnung

$$\zeta = z'\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi c}{b}\right)^2\right] + \frac{\left\{c\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi c}{b}\right)^2\right]\right\}^2}{z'} \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

Zum Vergleich wird die Abbildungsfunktion für den Einzelkreis

$$\zeta = z' + \frac{c^2}{z'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

angeführt. Man kann also genau dieselbe Konstruktion von Trefftz anwenden, wenn man auf der reellen Achse an Stelle von c die Strecke $c\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi c}{b}\right)^2\right]$ aufträgt und dann nach erfolgter Ausführung der durch das zweite Glied von (49) gegebenen Abbildung den großen Kreis um $\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi c}{b}\right)^2\right]$ verzerrt, worauf dann schließlich dieselbe Zusammensetzung beider Abbildungen folgt. Für $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{b} \sim 0{,}1$ wird $\frac{1}{6}\left(\frac{\pi c}{b}\right)^2 = 0{,}0173$ und $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi c}{b}\right)^2 = 0{,}0347$.

Für Luftschrauben, wo a/b weit unter 0,1 bleibt, wenn man von den Teilen in unmittelbarer Nähe der Nabe absieht, wird man also unbedenklich die gewöhnliche Abbildung 50 benutzen und somit ohne große Fehler die am Einzelprofil gefundenen Auftriebskoeffizienten benutzen können.

Für mit mehr Flügeln besetzte Schrauben oder für größere Werte von a/b wird man die Abb. 49 anwenden, die nach obigem auch keine größeren zeichnerischen oder rechnerischen Schwierigkeiten bedingt.

Da man in der Propellertheorie bei der Bestimmung der Anblasegeschwindigkeit am Propellerflügel die Zusatzgeschwindigkeiten, sowohl die axiale als die tangentiale berücksichtigt, so wird dadurch der früher erwähnte Nachteil dieser Strömung, deren Zirkulation keine axiale Geschwindigkeitszusatzkomponente im Unendliche liefert, wieder kompensiert.

6. Die verallgemeinerte Gitterströmung. Fortsetzung von Punkt **4**. Für die weitere Rechnung und die Ermittlung des umströmten Profils aus den vorgegebenen Grunddaten: d. h. 1. der Geschwindigkeit im Unendlichen w_∞, die bei der Propellerstrahltheorie der Geschwindigkeit in der Propellerebene entspricht und mit w_1 bezeichnet werden soll und 2. der halben Zusatzgeschwindigkeit w_2, werden die Formeln (30) bis (39) auf eine bequemere und anschaulichere Form gebracht. Setzt man also

$$v_{x\infty}^2 + v_{y\infty}^2 = w_1^2,$$

$$\frac{v_{x\infty}}{w_1} = \cos\beta_1, \qquad \frac{v_{y\infty}}{w_1} = \sin\beta_1$$

und

$$u_{x\infty}^2 + u_{y\infty}^2 = w_2^2,$$

$$\frac{u_{x\infty}}{w_2} = \cos\beta_2, \qquad \frac{u_{y\infty}}{w_2} = \sin\beta_2,$$

so gehen die Formeln (37) und (38) über in

$$P_y = 2\,b\,\varrho\,w_1\,w_2\cos(\beta_1+\beta_2) = b\,\frac{\gamma\,w_1^2}{2\,g}\cdot 4\,\frac{w_2}{w_1}\cos(\beta_1+\beta_2) \quad \ldots \quad (51),$$

$$P_x = -\,2\,b\,\varrho\,w_1\,w_2\sin(\beta_1+\beta_2) = -\,b\,\frac{\gamma\,w_1^2}{2\,g}\cdot 4\,\frac{w_2}{w_1}\sin(\beta_1+\beta_2) \quad \ldots \quad (52).$$

Quadriert man die Gl. (30) und (31) und addiert sie, so erhält man

$$1 = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi}{b}(q_1+q_2) + \cos\frac{2\pi}{b}(p_1+p_2)\right] \quad \ldots \ldots \quad (53),$$

dasselbe mit den Gl. (32) und (33) ausgeführt, gibt

$$\frac{w_2^2}{w_1^2} \doteq \frac{1}{2}\left[\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi}{b}(q_1+q_2) - \cos\frac{2\pi}{b}(p_1+p_2)\right] \quad \ldots \ldots \quad (54).$$

Aus (53) und (54) erhält man sofort die Bestimmungsgleichungen für (p_1+p_2) und (q_1+q_2)

$$\mathfrak{Cof}\,\frac{2\pi}{b}(q_1+q_2) = 1 + \frac{w_2^2}{w_1^2} \quad . \quad (55), \qquad \cos\frac{2\pi}{b}(p_1+p_2) = 1 - \frac{w_2^2}{w_1^2} \quad . \quad (56).$$

Das Verhältnis $q_1/p_1 = \operatorname{tg}\alpha$ erhält man aus Gl. (30) und (31) zu

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\beta_1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{b}(p_1+p_2)\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{b}(q_1+q_2)}{1 + \operatorname{tg}\beta_1\operatorname{tg}\frac{\pi}{b}(p_1+p_2)\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{b}(q_1+q_2)} \quad \ldots \ldots \quad (57).$$

Setzt man $w_2/w_1 = \delta$, so hat man aus (55) und (56)

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{b}(p_1 + p_2) \operatorname{Tg} \frac{\pi}{b}(q_1 + q_2) = \frac{\delta^2}{\sqrt{4-\delta^4}}$$

und in (57) eingesetzt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta_1 - \dfrac{\delta^2}{\sqrt{4-\delta^4}}}{1 + \operatorname{tg} \beta_1 \dfrac{\delta^2}{\sqrt{4-\delta^4}}} = \frac{q_1}{p_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58).$$

Da nun auch die Gl. (32) und (33) bestehen müssen, so erhalten wir aus diesen noch eine Beziehung zwischen $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{tg} \beta_2$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta_2 - \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{b}(p_1 + p_2) \operatorname{Ktg} \dfrac{\pi}{b}(q_1 + q_2)}{1 + \operatorname{tg} \beta_2 \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{b}(p_1 + p_2) \operatorname{Ktg} \dfrac{\pi}{b}(q_1 + q_2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

oder nach Einführung von $\delta = w_2/w_1$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta_2 - \sqrt{\dfrac{2+\delta^2}{2-\delta^2}}}{1 + \operatorname{tg} \beta_2 \sqrt{\dfrac{2+\delta^2}{2-\delta^2}}} = \frac{q_1}{p_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60).$$

Daraus folgt, daß die Grunddaten $\delta = w_2/w_1$, β_1 und β_2, das heißt das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten und ihre Richtungen nicht unabhängig voneinander sind. Dies hat seinen mechanischen Grund, indem P_y und P_x [Gl. (51) und (52)], d. h. die Zugkraft der Schraube und das Antriebsmoment nicht unabhängig voneinander sein können. Hat man also δ und β_1 gewählt, so erhält man dazu β_2 aus Gl. (60) und (58) zu

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\operatorname{tg} \beta_1 + \dfrac{\sin \dfrac{2\pi}{b}(p_1 + p_2)}{\operatorname{Sin} \dfrac{2\pi}{b}(q_1 + q_2)}}{1 - \operatorname{tg} \beta_1 \dfrac{\sin \dfrac{2\pi}{b}(p_1 + p_2)}{\operatorname{Sin} \dfrac{2\pi}{b}(q_1 + q_2)}} = \frac{\operatorname{tg} \beta_1 + \sqrt{\dfrac{2-\delta^2}{2+\delta^2}}}{1 - \operatorname{tg} \beta_1 \sqrt{\dfrac{2-\delta^2}{2+\delta^2}}} = \operatorname{tg}(\beta_1 + \vartheta) \quad . \quad . \quad (61),$$

wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\sin \dfrac{2\pi}{b}(p_1 + p_2)}{\operatorname{Sin} \dfrac{2\pi}{b}(q_1 + q_2)} = \sqrt{\frac{2-\delta^2}{2+\delta^2}} = \operatorname{tg} \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

setzt, also

$$\beta_2 = \beta_1 + \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

und weiter die Profilparameter in der Verbindung $(p_1 + p_2)$, $(q_1 + q_2)$ und q_1/p_1 aus den Gl. (55), (56) und (58) oder (60). Die Größe des einen Parameters, z. B. p_1, bleibt also scheinbar noch frei. Diese Unbestimmtheit wird durch Hinzuziehung der Gl. (39) behoben, indem man verlangt, daß beide Staupunkte in (39) eingesetzt denselben Wert für Ψ ergeben, d. h. auf derselben Stromlinie der Kontur des umflossenen Profils liegen.

Sind schließlich die Grunddaten festgelegt und die Parameter ermittelt, so kann man mittels Gl. (39), in der nun alle Beiwerte bekannt sind, die Profilumrandung punktweise finden. Die durchgeführte Rechnung gilt dann nicht nur für einen bestimmten Fall, sondern für eine Reihe ähnlicher Fälle mit denselben Verhältnissen p/b; q/b; x/b; y/b bzw. $\delta = w_2/w_1$.

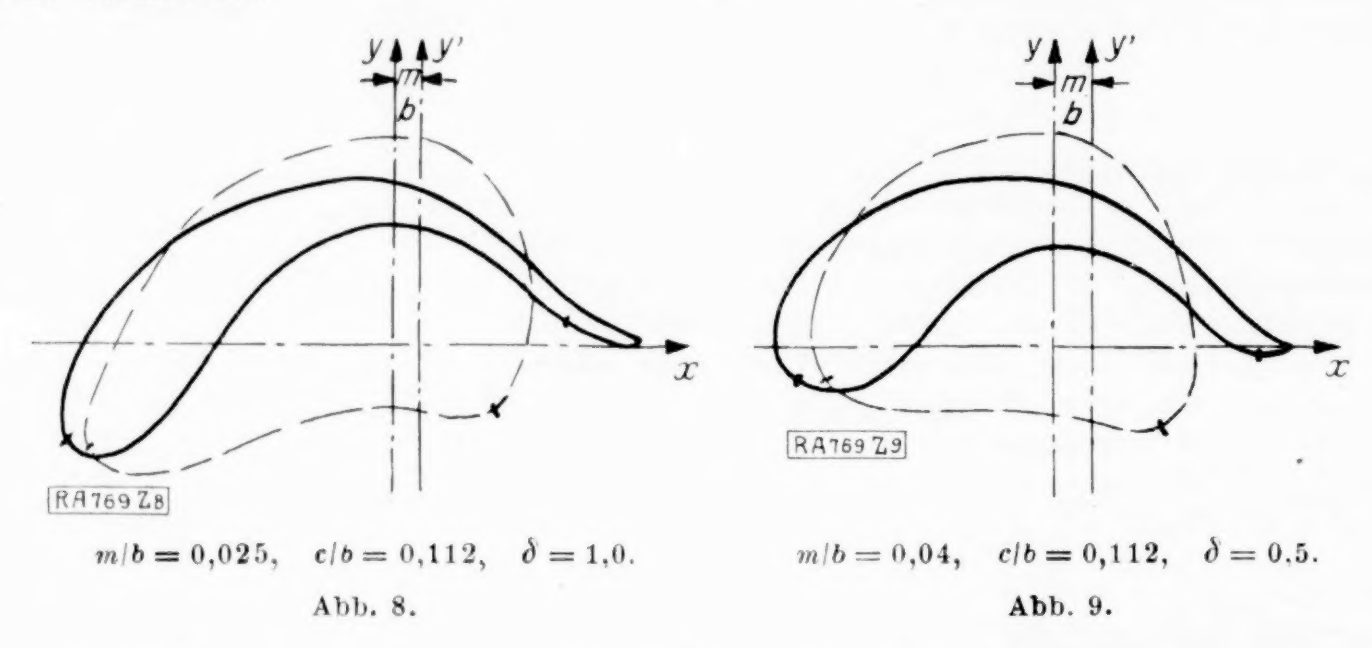
Die Wahl der Grunddaten δ und β_1 selbst wird von den an die Maschine gestellten Anforderungen abhängig sein.

Aus den Gl. (55) und (56) folgt, daß δ nur in den Grenzen zwischen 0 und 1,41 angenommen werden kann, je nach der Beaufschlagung der Schraube $0 \leqq \delta \leqq \sqrt{2}$.

Nach Gl. (62) bleibt der Winkel ϑ in den Grenzen zwischen 45° und Null Grad, also

$$\pi/4 \geqq \vartheta \geqq 0 .$$

Diese rechnerisch ermittelten Umrisse, Abb. 5—7, werden nun demselben Abbildungsverfahren Gl. (24) und (25) unterworfen, wobei dieselben Annäherungsformeln (49) bzw. (50) angewandt werden können. Die folgenden drei Abb. 8—10 zeigen die graphisch gewonnenen Profile, wobei der Einfachheit halber die Gl. (50) benutzt worden ist. Der Koordinatenanfangspunkt ist erst auf der reellen Achse um m/b nach rechts verschoben, sodann die Strecke c/b auf der reellen Achse so gewählt worden, daß der Endpunkt derselben noch im Inneren der Umrandung lag, um dadurch Ecken oder Spitzen im Profil zu vermeiden.

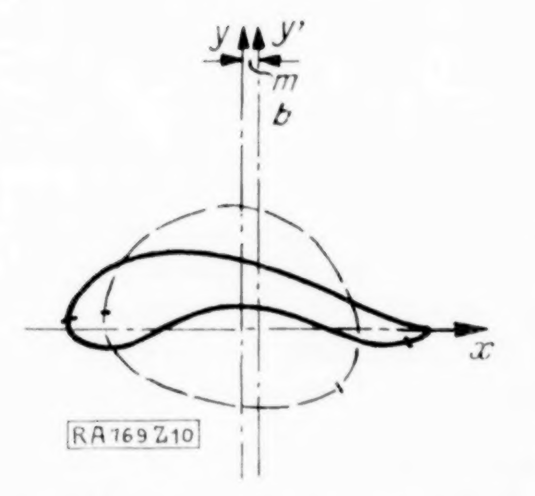


$m/b = 0{,}025$, $c/b = 0{,}112$, $\delta = 1{,}0$.

Abb. 8.

$m/b = 0{,}04$, $c/b = 0{,}112$, $\delta = 0{,}5$.

Abb. 9.



$m/b = 0{,}018$, $c/b = 0{,}09$, $\delta = 0{,}1$.

Abb. 10.

Die Profile zeigen eine ausgesprochene Fischform, die durch die Wahl von m und c noch verschiedentlich verändert werden kann.

Schließlich muß noch für die Anwendung auf Propeller einiges über die physikalischen Grenzen des möglichen Auftriebes bemerkt werden. Neben dem gewohnten Verschwinden des Widerstandes bei reibungsloser Potentialströmung, erhält man hier auch noch einen vermehrten Auftrieb, der physikalisch unmöglich erscheint.

Nach der Schraubenstrahltheorie kann die Schubkraft S einer ideellen Hubschraube höchstens

$$S = F \frac{\gamma w^2}{2g} \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

werden, wo F die Propellerkreisfläche und w die der Luft erteilte axiale Geschwindigkeit bedeuten.

Nach Gl. (51) würde bei der obigen theoretischen Strömung die größte Schubkraft

$$S = F \frac{\gamma w_1^2}{2g} 4\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)$$

betragen. Nun ist für $\delta = 1{,}0$, $w = 2 w_1 \sin \beta_1$ zu setzen und in unserem Fall $\beta_1 = \vartheta/2$, also unter Berücksichtigung von Gl. (62)

$$\sin^2 \beta_1 = {}^1\!/_2 \left[1 - {}^1\!/_2 \sqrt{2 + \delta^2}\right]$$

Aus dem Vergleich der beiden Formeln (65) und (66) erhält man die Gleichung für die höchst mögliche physikalische Grenze für das Maß δ der Beaufschlagung

$$1 = \frac{2\delta}{1 - {}^1\!/_2 \sqrt{2 + \delta^2}}$$

und daraus $\delta = 0{,}144$, wogegen die theoretische Grenze bei 1,41 liegt, bei der die axialen Geschwindigkeiten überhaupt verschwinden und der Auftrieb nur von der Umfangsgeschwindigkeit abhängig wird und sein theoretisches Höchstmaß erreicht. Die stark gewölbten Profile, Abb. 8 und 9, liegen demnach für Schrauben bereits außerhalb der praktischen Verwendungsmöglichkeit und nur die schwachgewölbten, Abb. 10, kommen in Frage, für die $\delta \leq 0{,}144$ ist.

Allgemeine Sätze über die Strömung in Kreiselrädern und Turbinen.

Von WILHELM MÜLLER in Hannover.

1. Einleitung. Wenn die Begrenzung einer strömenden Flüssigkeit eine translatorische gleichförmige Bewegung ausführt, so läßt sich die resultierende Strömung auf den absoluten Raum oder auf die Begrenzung beziehen. Für die Bestimmung der auf die Wandung ausgeübten Kraftwirkung genügt es, die Begrenzung als fest anzunehmen, also dem ganzen System einer der Translation entgegengesetzte Geschwindigkeit zu erteilen. Der Fall, daß die Grenzen oder Wände eine Rotation um eine feste Achse ausführen, bietet insofern besondere Verhältnisse dar, als das absolute und relative Strömungsfeld sich nicht nur um einen konstanten Vektor, sondern um ein nicht durch ein Potential darstellbares Zusatzfeld unterscheiden und die hydrodynamischen Grundformeln nicht ohne weiteres, sondern erst nach geeigneter Umformung auf die Relativströmung übertragbar sind.

Die Bedeutung dieses Falles für alle diejenigen Maschinengruppen (Propeller, Kreiselpumpen, Turbinen), die unmittelbar die Kräfte der strömenden Flüssigkeit in Form von Drehung zu übertragen haben, mag es rechtfertigen, wenn ich es unternehme, in folgendem einige allgemeine Sätze und Ansätze im Anschluß an klassische und neuere Arbeiten von F. Prášil[1]), R. v. Mises[2]), W. Kucharsky[3]), E. Hahn[4]) u. a. in Kürze zu entwickeln.

2. Die grundlegenden Bewegungsgleichungen. Bei rotierenden Grenzen sind die Eulerschen Grundgleichungen erst dann auf die Relativbewegung der Flüssigkeit anwendbar, wenn man die Beschleunigung $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ durch zwei Zusatzglieder ergänzt hat, die als Zentripetalbeschleunigung und Coriolisbeschleunigung bekannt sind. Wenn wir die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das System dreht, mit ω und als Vektor mit $\bar{\omega}$, ferner den Radiusvektor von einem Punkt 0 der Drehachse nach dem Aufpunkt mit $\mathfrak{s}$ bezeichnen, so können wir die Zusatzbeschleunigungen in der Form darstellen

$$\mathfrak{b}_1 = [\bar{\omega}\,(\bar{\omega}\,\mathfrak{s})]\,; \quad \mathfrak{b}_2 = 2\,[\bar{\omega}\,\mathfrak{v}]\,,$$

so daß die Eulersche Bewegungsgleichung für die Relativströmung lautet

$$\mathfrak{f} - \frac{1}{\varrho}\nabla p = \frac{\partial \mathfrak{v}}{dt} + \mathfrak{v}\nabla\cdot\mathfrak{v} + [\bar{\omega}\,(\bar{\omega}\,\mathfrak{s})] + 2[\bar{\omega}\,\mathfrak{v}] \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

wo $\mathfrak{f}$ die Kraft, $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ die Masse der Volumeneinheit der Flüssigkeit, p den Druck bedeutet[5])

Diese Gleichung können wir umformen auf Grund der bekannten Vektorbeziehung

$$\mathfrak{v}\nabla\cdot\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - [\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}] \,.\quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{a}).$$

Wenn wir den halben Rotor von $\mathfrak{v}$ gleich dem Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ setzen, so erhalten wir damit aus (1)

$$\mathfrak{f} - \frac{1}{\varrho}\nabla p = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - 2\,[\mathfrak{v},\mathfrak{w} + \bar{\omega}] + [\bar{\omega}\,(\bar{\omega}\,\mathfrak{s})] \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

---

[1]) F. Prášil, Flüssigkeitsbewegung in Rotationshohlräumen, Schweizer Bauzeitung 1903, Bd. 41 S. 207, 233, 249, 282, 293; Bestimmung der Kranzprofile u. d. Schaufelformen f. Turbinen u. Kreiselpumpen, Bauzeitung 1906, Bd. 48, S. 277.

[2]) R. v. Mises, Theorie der Wasserräder, Leipzig 1908.

[3]) W. Kucharsky, Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper, München u. Berlin 1908.

[4]) E Hahn, Note sur l'application aux turbomachines des Theorie modernes de l'hydrodynamique, Proceedings of the I. intern. Congress for appl. Mechanics (Biezeno, Burgers), Delft 1925, S. 427 bis 431.

[5]) Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist durch die eckige Klammer, das skalare Produkt wie das algebraische Produkt bezeichnet. ∇ (nabla) ist das Zeichen für den symbolischen Vektor, dessen Komponenten $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ sind. Vor einem Vektor bedeutet also das Zeichen ∇ »Divergenz«, vor einem Skalar dagegen »Gradient«.

Die Grenzen für β_1 und $\beta_2 = \beta_1 + \vartheta$ erhält man aus den Gl. (51) und (52). Bewegt sich das Flügelelement, wie in der ganzen Arbeit angenommen worden ist, in Richtung der negativen x-Achse, Abb. 4, und soll der Schraubenschub P_y in die Richtung der positiven y-Achse fallen, so muß nach Gl. (51) $(\beta_1 + \beta_2)$ nur zwischen den Grenzen $\pm \pi/2$ eingeschlossen sein. Man kann dann nach Gl. (52) drei Arten von Schrauben unterscheiden — die Treib-, Hub- und Gleitschraube. Bei der Treibschraube ist die Umfangskraft P_x positiv, d. h. entgegengesetzt der Bewegungsrichtung des Schraubenelements. Die Schraube muß durch einen Motor angetrieben werden. Es muß dann

$$0 > \beta_1 + \beta_2 = 2\,\beta_1 + \vartheta > -\pi/2$$

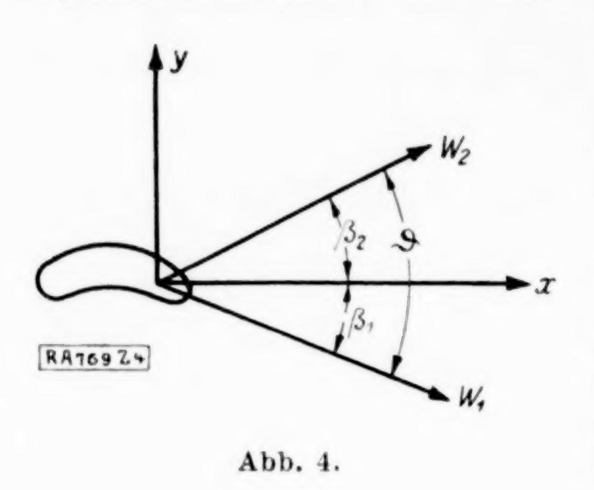


Abb. 4.

sein, wobei der Schub P_y mit ins Negative wachsendem $\beta_1 + \beta_2$, d. h. einer Vergrößerung der axialen Fortschreitungsgeschwindigkeit der Schraube, abnimmt, die Widerstandskraft P_x zunimmt, d. h. die Treibschraube geht in ein Gebläse über. Für $\beta_1 + \beta_2 = 2\,\beta_1 + \vartheta = 0$ erhält man die Hubschraube, d. h. die Schraubenachse steht still, die Schubkraft P_y wird ein Maximum, die Widerstandskraft P_x verschwindet, weil keine Reibung vorausgesetzt ist. Für $0 < \beta_1 + \beta_2 = 2\,\beta_1 + \vartheta < \pi/2$ bekommt man die Gleit- oder Segelschraube, d. h. die Schraubenachse hat jetzt eine Fortschreitungsgeschwindigkeit in der negativen y-Richtung und der Propeller wird durch den Luftstrom selbst angetrieben, da P_x negativ wird. Auch hier wird mit wachsendem $(\beta_1 + \beta_2)$ oder wachsender axialen Fortschreitungsgeschwindigkeit die Schubkraft kleiner, die Umfangskraft größer, d. h. die Schraube geht in eine Windmaschine über. Diese Betrachtung gilt streng nur für $\delta = 1{,}0$. Für andere Werte von δ verschieben sich die Verhältnisse so, daß bei $\delta < 1{,}0$ bereits etwas früher, also bei der Fahrtschraube die Umfangskraft verschwindet und für $\delta > 1{,}0$ erst etwas später, also erst bei der Segelschraube.

Hiermit liefert diese Strömung für sämtliche Betriebszustände von Schrauben und Turbinen die zugehörigen umflossenen Gitterkonturen. Eine bestimmte Profilgattung mit geometrisch ähnlichen Profilen (der Gitterkonstanten b proportional) wird dann nur durch die beiden Größen: δ, ein Maß für die Beaufschlagung, und β, oder was dasselbe ist $(\beta_1 + \beta_2)$, ein Maß für die axiale Fortschreitungsgeschwindigkeit der Schraubenachse, d. h. ein Merkmal für die Art der Schraube: Treib-, Hub-, Gleitschraube, vollkommen bestimmt.

Der Kürze halber und aus besonderen praktischen Zwecken, soll sich hier die Ermittlung der Profile nur auf den Grenzzustand der Hub- und Gleitschraube beschränken. Die gerechneten Zahlenwerte sind in den folgenden Zahlentafeln zusammengestellt, wobei für die Rechnung die Profilgleichung (39) zweckmäßig mit $\frac{2\pi}{b\,w_1}$ multipliziert wurde.

$$C = \psi\,\frac{2\pi}{b\,w_1} = \frac{2\pi y}{b}\cos\beta_1 - \frac{2\pi x}{b}\sin\beta_1 + \frac{(\cos\beta'_1 - \cos\beta_1)\,\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y}{b} + (\sin\beta'_1 - \sin\beta_1)\sin\frac{2\pi x}{b}}{\mathfrak{Cos}\,\frac{2\pi y}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}}$$
$$+ \cos\beta_2 \ln\frac{1}{2}\left(\mathfrak{Cos}\,\frac{2\pi y}{b} - \cos\frac{2x\pi}{b}\right) + 2\sin\beta_2\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x}{b}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi y}{b}\right) \quad . \quad (64).$$

Für $\delta = 1{,}0$; $\beta_1 + \beta_2 = 0$ wird

$$\vartheta = \frac{\pi}{6}\,; \quad \beta_1 = -\frac{\pi}{12}\,; \quad \beta_2 = +\frac{\pi}{12}\,; \quad \frac{p_1 + p_2}{b} = -0{,}25\,; \quad \frac{q_1 + q_2}{b} = -0{,}21\,; \quad \frac{q_1}{p_1} = -1{,}0\,;$$
$$C = -1{,}05$$

und die Profilgleichung

$$-1{,}05 = 0{,}966\,\frac{2\pi y}{b} + 0{,}259\,\frac{2\pi x}{b} + \frac{-0{,}659\,\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y}{b} + 0{,}17\sin\frac{2\pi x}{b}}{\mathfrak{Cos}\,\frac{2\pi y}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}}$$
$$+ 0{,}966\ln\frac{1}{2}\left(\mathfrak{Cos}\,\frac{2\pi y}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}\right) + 0{,}518\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x}{b}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi y}{b}\right)$$

liefert die Punkte

$\frac{p_1}{b}$	$\frac{q_1}{b}$	$\frac{p_2}{b}$	$\frac{q_2}{b}$	$\frac{x_1}{b}$	$\frac{y_1}{b}$	$\frac{x_2}{b}$	$\frac{y_2}{b}$	$\frac{x_3}{b}$	$\frac{y_3}{b}$	$\frac{x_4}{b}$	$\frac{y_4}{b}$
+ 0,08	− 0,08	− 0,33	− 0,13	0,0	− 0,063	0,0	0,225	0,14	0,0	− 0,30	0,0

Für $\delta = 0{,}5$, $\beta_1 + \beta_2 = 0$ wird

$$\vartheta = 41^0\,24', \quad \beta_1 = -\,20^0\,42', \quad \beta_2 = +\,20^0\,42', \quad \frac{p_1 + p_2}{b} = -\,0{,}114, \quad \frac{q_1 + q_2}{b} = -\,0{,}11,$$

$$\frac{q_1}{p_1} = -\,0{,}53, \quad C = -\,1{,}28$$

und die Profilgleichung

$$-\,1{,}28 = 0{,}936\,\frac{2\pi y}{b} + 0{,}3535\,\frac{2\pi x}{b} + \frac{-\,0{,}64\,\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y}{b} + 0{,}102\,\sin\frac{2\pi x}{b}}{\mathfrak{Cos}\,\frac{2\pi y}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}}$$

$$+\,0{,}936\,\ln\frac{1}{2}\left(\mathfrak{Cos}\,\frac{2\pi y}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}\right) + 0{,}707\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x}{b}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi y}{b}\right)$$

liefert die Punkte

$\frac{p_1}{b}$	$\frac{q_1}{b}$	$\frac{p_2}{b}$	$\frac{q_2}{b}$	$\frac{x_1}{b}$	$\frac{y_1}{b}$	$\frac{x_2}{b}$	$\frac{y_2}{b}$	$\frac{x_3}{b}$	$\frac{y_3}{b}$	$\frac{x_4}{b}$	$\frac{y_4}{b}$
0,132	− 0,07	− 0,246	− 0,04	0,0	0,23	0,0	− 0,065	0,13	0,0	− 0,256	0,0

Für $\delta = 0{,}1$, $\beta_1 + \beta_2 = 0$ wird

$$\vartheta = 44^0\,52' \quad \beta_1 = -\,22^0\,26', \quad \beta_2 = +\,22^0\,26', \quad \frac{p_1 + p_2}{b} = -\,0{,}0223, \quad \frac{q_1 + q_2}{b} = -\,0{,}0223$$

$$\frac{q_1}{p_1} = -\,0{,}413, \quad C = -\,1{,}78$$

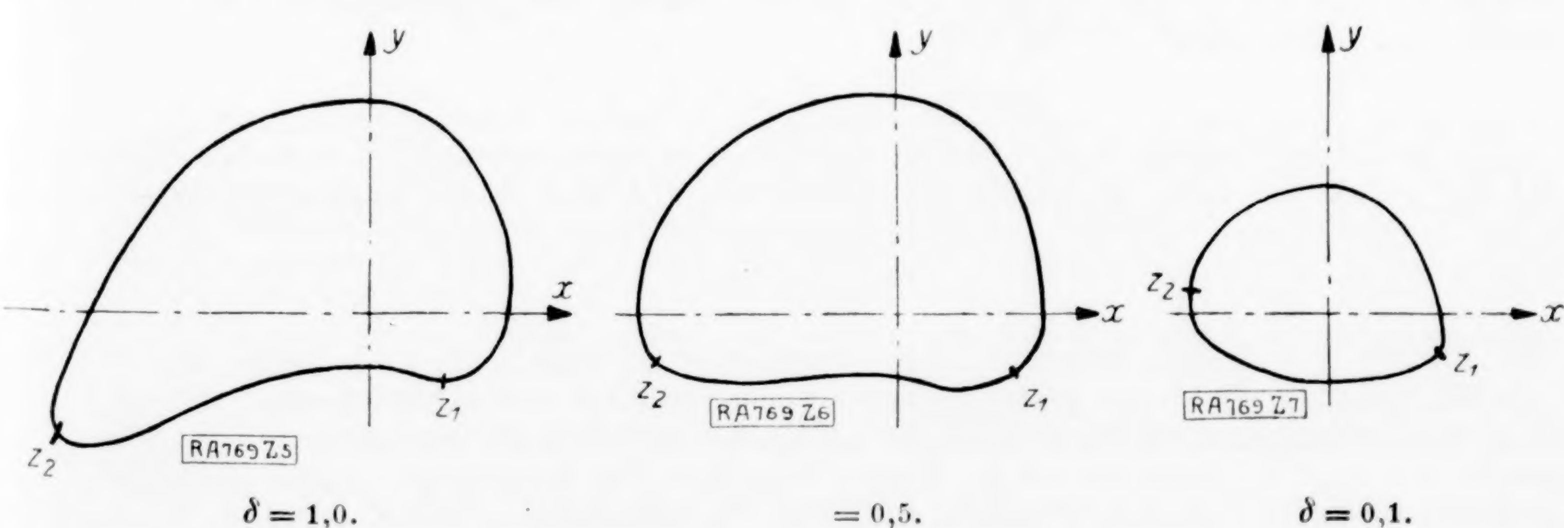
und die Profilgleichung

$$-\,1{,}78 = 0{,}9243\,\frac{2\pi y}{b} + 0{,}3816\,\frac{2\pi x}{b} + \frac{-\,0{,}351\,\mathfrak{Sin}\,\frac{2\pi y}{b} - 0{,}049\,\sin\frac{2\pi x}{b}}{\mathfrak{Cos}\,\frac{2\pi y}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}}$$

$$+\,0{,}9243\,\ln\frac{1}{2}\left(\mathfrak{Cos}\,\frac{2\pi y}{b} - \cos\frac{2\pi x}{b}\right) + 0{,}7632\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi x}{b}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi y}{b}\right)$$

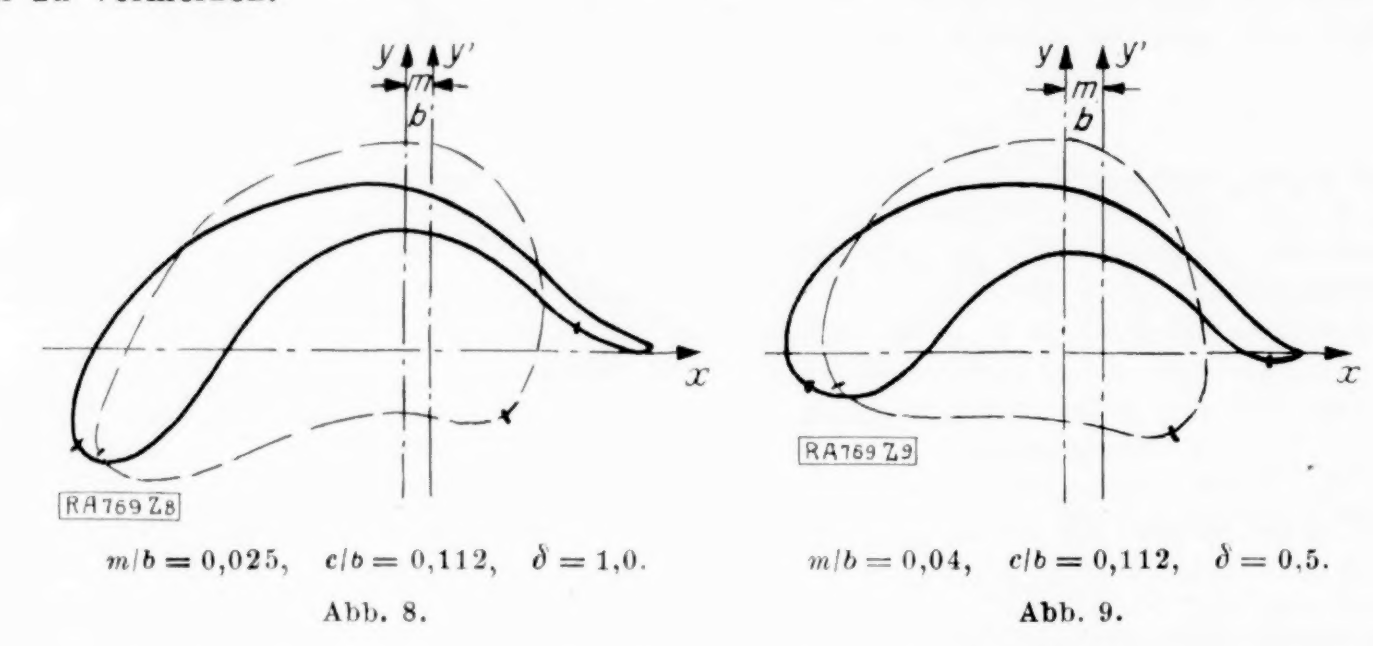
liefert die Punkte

$\frac{p_1}{b}$	$\frac{q_1}{b}$	$\frac{p_2}{b}$	$\frac{q_2}{b}$	$\frac{x_1}{b}$	$\frac{y_1}{b}$	$\frac{x_2}{b}$	$\frac{y_2}{b}$	$\frac{x_3}{b}$	$\frac{y_3}{b}$	$\frac{x_4}{b}$	$\frac{y_4}{b}$
0,121	− 0,05	− 0,1433	+ 0,0277	0,118	0,0	− 0,14	0,0	0,0	0,13	0,0	− 0,08



$\delta = 1{,}0$. Abb. 5. $= 0{,}5$. Abb. 6. $\delta = 0{,}1$. Abb. 7.

Diese rechnerisch ermittelten Umrisse, Abb. 5—7, werden nun demselben Abbildungsverfahren Gl. (24) und (25) unterworfen, wobei dieselben Annäherungsformeln (49) bzw. (50) angewandt werden können. Die folgenden drei Abb. 8—10 zeigen die graphisch gewonnenen Profile, wobei der Einfachheit halber die Gl. (50) benutzt worden ist. Der Koordinatenanfangspunkt ist erst auf der reellen Achse um m/b nach rechts verschoben, sodann die Strecke c/b auf der reellen Achse so gewählt worden, daß der Endpunkt derselben noch im Inneren der Umrandung lag, um dadurch Ecken oder Spitzen im Profil zu vermeiden.

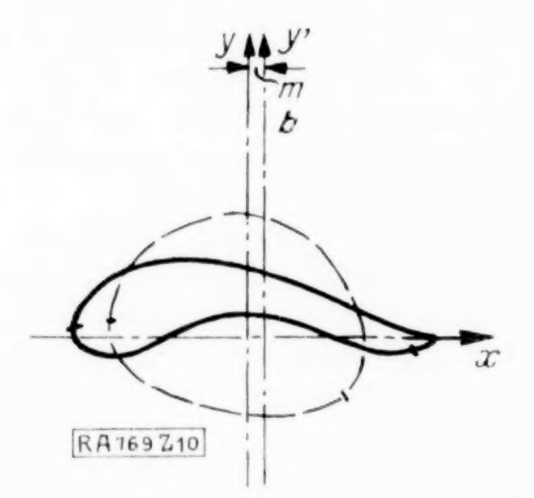


$m/b = 0{,}025$, $c/b = 0{,}112$, $\delta = 1{,}0$.

Abb. 8.

$m/b = 0{,}04$, $c/b = 0{,}112$, $\delta = 0{,}5$.

Abb. 9.



$m/b = 0{,}018$, $c/b = 0{,}09$, $\delta = 0{,}1$.

Abb. 10.

Die Profile zeigen eine ausgesprochene Fischform, die durch die Wahl von m und c noch verschiedentlich verändert werden kann.

Schließlich muß noch für die Anwendung auf Propeller einiges über die physikalischen Grenzen des möglichen Auftriebes bemerkt werden. Neben dem gewohnten Verschwinden des Widerstandes bei reibungsloser Potentialströmung, erhält man hier auch noch einen vermehrten Auftrieb, der physikalisch unmöglich erscheint.

Nach der Schraubenstrahltheorie kann die Schubkraft S einer ideellen Hubschraube höchstens

$$S = F\frac{\gamma w^2}{2g} \quad \ldots \ldots \quad (65)$$

werden, wo F die Propellerkreisfläche und w die der Luft erteilte axiale Geschwindigkeit bedeuten.

Nach Gl. (51) würde bei der obigen theoretischen Strömung die größte Schubkraft

$$S = F\frac{\gamma w_1^2}{2g} 4\delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (66)$$

betragen. Nun ist für $\delta = 1{,}0$, $w = 2w_1 \sin\beta_1$ zu setzen und in unserem Fall $\beta_1 = \vartheta/2$, also unter Berücksichtigung von Gl. (62)

$$\sin^2\beta_1 = {}^1/_2\left[1 - {}^1/_2\sqrt{2+\delta^2}\right]$$

Aus dem Vergleich der beiden Formeln (65) und (66) erhält man die Gleichung für die höchst mögliche physikalische Grenze für das Maß δ der Beaufschlagung

$$1 = \frac{2\delta}{1 - {}^1/_2\sqrt{2+\delta^2}}$$

und daraus $\delta = 0{,}144$, wogegen die theoretische Grenze bei 1,41 liegt, bei der die axialen Geschwindigkeiten überhaupt verschwinden und der Auftrieb nur von der Umfangsgeschwindigkeit abhängig wird und sein theoretisches Höchstmaß erreicht. Die stark gewölbten Profile, Abb. 8 und 9, liegen demnach für Schrauben bereits außerhalb der praktischen Verwendungsmöglichkeit und nur die schwachgewölbten, Abb. 10, kommen in Frage, für die $\delta \leqq 0{,}144$ ist.

Allgemeine Sätze über die Strömung in Kreiselrädern und Turbinen.

Von **WILHELM MÜLLER** in Hannover.

1. Einleitung. Wenn die Begrenzung einer strömenden Flüssigkeit eine translatorische gleichförmige Bewegung ausführt, so läßt sich die resultierende Strömung auf den absoluten Raum oder auf die Begrenzung beziehen. Für die Bestimmung der auf die Wandung ausgeübten Kraftwirkung genügt es, die Begrenzung als fest anzunehmen, also dem ganzen System einer der Translation entgegengesetzte Geschwindigkeit zu erteilen. Der Fall, daß die Grenzen oder Wände eine Rotation um eine feste Achse ausführen, bietet insofern besondere Verhältnisse dar, als das absolute und relative Strömungsfeld sich nicht nur um einen konstanten Vektor, sondern um ein nicht durch ein Potential darstellbares Zusatzfeld unterscheiden und die hydrodynamischen Grundformeln nicht ohne weiteres, sondern erst nach geeigneter Umformung auf die Relativströmung übertragbar sind.

Die Bedeutung dieses Falles für alle diejenigen Maschinengruppen (Propeller, Kreiselpumpen, Turbinen), die unmittelbar die Kräfte der strömenden Flüssigkeit in Form von Drehung zu übertragen haben, mag es rechtfertigen, wenn ich es unternehme, in folgendem einige allgemeine Sätze und Ansätze im Anschluß an klassische und neuere Arbeiten von F. Prášil[1]), R. v. Mises[2]), W. Kucharsky[3]), E. Hahn[4]) u. a. in Kürze zu entwickeln.

2. Die grundlegenden Bewegungsgleichungen. Bei rotierenden Grenzen sind die Eulerschen Grundgleichungen erst dann auf die Relativbewegung der Flüssigkeit anwendbar, wenn man die Beschleunigung $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ durch zwei Zusatzglieder ergänzt hat, die als Zentripetalbeschleunigung und Coriolisbeschleunigung bekannt sind. Wenn wir die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das System dreht, mit ω und als Vektor mit $\bar{\omega}$, ferner den Radiusvektor von einem Punkt 0 der Drehachse nach dem Aufpunkt mit $\mathfrak{s}$ bezeichnen, so können wir die Zusatzbeschleunigungen in der Form darstellen

$$\mathfrak{b}_1 = [\bar{\omega}\,(\bar{\omega}\,\mathfrak{s})]\,; \quad \mathfrak{b}_2 = 2\,[\bar{\omega}\,\mathfrak{v}]\,,$$

so daß die Eulersche Bewegungsgleichung für die Relativströmung lautet

$$\mathfrak{f} - \frac{1}{\varrho}\nabla p = \frac{\partial\mathfrak{v}}{dt} + \mathfrak{v}\nabla\cdot\mathfrak{v} + [\bar{\omega}\,(\bar{\omega}\,\mathfrak{s})] + 2[\bar{\omega}\,\mathfrak{v}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

wo $\mathfrak{f}$ die Kraft, $\varrho = \frac{\gamma}{g}$ die Masse der Volumeneinheit der Flüssigkeit, p den Druck bedeutet[5])

Diese Gleichung können wir umformen auf Grund der bekannten Vektorbeziehung

$$\mathfrak{v}\nabla\cdot\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - [\mathfrak{v}\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{v}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a).$$

Wenn wir den halben Rotor von $\mathfrak{v}$ gleich dem Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ setzen, so erhalten wir damit aus (1)

$$\mathfrak{f} - \frac{1}{\varrho}\nabla p = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - 2[\mathfrak{v}, \mathfrak{w} + \bar{\omega}] + [\bar{\omega}\,(\bar{\omega}\,\mathfrak{s})] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

---

[1]) F. Prášil, Flüssigkeitsbewegung in Rotationshohlräumen, Schweizer Bauzeitung 1903, Bd. 41 S. 207, 233, 249, 282, 293; Bestimmung der Kranzprofile u. d. Schaufelformen f. Turbinen u. Kreiselpumpen, Bauzeitung 1906, Bd. 48, S. 277.

[2]) R. v. Mises, Theorie der Wasserräder, Leipzig 1908.

[3]) W. Kucharsky, Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper, München u. Berlin 1908.

[4]) E Hahn, Note sur l'application aux turbomachines des Theorie modernes de l'hydrodynamique, Proceedings of the I. intern. Congress for appl. Mechanics (Biezeno, Burgers), Delft 1925, S. 427 bis 431.

[5]) Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist durch die eckige Klammer, das skalare Produkt wie das algebraische Produkt bezeichnet. ∇ (nabla) ist das Zeichen für den symbolischen Vektor, dessen Komponenten $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ sind. Vor einem Vektor bedeutet also das Zeichen ∇ »Divergenz«, vor einem Skalar dagegen »Gradient«.

Bilden wir die Rotation dieser Gleichung, so kommt wegen der Beziehungen

$$\mathrm{rot}\,[\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}] = \mathfrak{A}\cdot\nabla\,\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\cdot\nabla\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,\nabla\cdot\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\,\nabla\cdot\mathfrak{B} \quad \ldots \quad (b)$$

und

$$\mathrm{rot}\,(\nabla\,\varphi) = 0 \qquad (\mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B} \text{ Vektoren, } \varphi \text{ Skalar}) \quad \ldots \quad (c)$$

die einfache Gleichung

$$o = -(\mathfrak{w} + \overline{\omega})\,\nabla\cdot\mathfrak{v} + \mathfrak{v}\,\nabla\cdot\mathfrak{w} \quad \ldots \quad (3),$$

von der folgende Lösungen bemerkenswert und für die Anwendungen wichtig sind.

1. Bei einer wirbellosen Strömung ($\mathfrak{w} = 0$) kommt

$$\overline{\omega}\,\nabla\cdot\mathfrak{v} = 0.$$

Wenn die Drehachse in die z-Richtung fällt, so wird

$$\omega_z\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0\,, \qquad \omega_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\,, \qquad \omega_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

In einem rotierenden System kann also für die Relativbewegung ein Geschwindigkeitspotential existieren, wenn dieselbe zwischen parallelen zur Drehachse senkrecht stehenden Ebenen erfolgt. (Angenähert verwirklicht bei Radialturbinen und Kreiselpumpen.)

2. Die Gleichung ist bei konstanter Drehgeschwindigkeit in jedem Falle erfüllt durch

$$\mathfrak{w} = -\overline{\omega}\,,$$

da $\mathfrak{s}\,\nabla\cdot\overline{\mathfrak{w}}$ verschwindet. Bezeichnet man mit $\mathfrak{c}$ die Absolutgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens so hat man

$$\begin{aligned}\mathfrak{c} &= \mathfrak{v} + [\overline{\omega}\,\mathfrak{s}]\\ \mathrm{rot}\;\mathfrak{c} &= 2\,\mathfrak{w} + \mathrm{rot}\,[\overline{\omega}\,\mathfrak{s}]\\ &= 2\,\mathfrak{w} + \overline{\omega}\cdot\nabla\,\mathfrak{s} - \mathfrak{s}\cdot\nabla\,\overline{\omega} + (\mathfrak{s}\,\nabla)\cdot\overline{\omega} - \overline{\omega}\,\nabla\cdot\mathfrak{s}\\ &= 2\,\mathfrak{w} + 3\,\overline{\omega} - \overline{\omega} = 2\,(\mathfrak{w} + \overline{\omega}) = 0\,.\end{aligned}$$

Einer Relativbewegung, dessen Wirbelvektor $\mathfrak{w}$ entgegengesetzt gleich dem Drehvektor $\overline{\omega}$ des Systems ist, entspricht eine Absolutbewegung, für welche ein Geschwindigkeitspotential existiert. Umgekehrt gehört zu einer absoluten Potentialströmung eine Relativströmung, deren Wirbelvektor der Drehung entgegengesetzt gleich ist.

In einem abgeschlossenen Schaufelkanal wird also das reibungslose Wasser relativ zum Rad dauernd eine kreisende Bewegung um einen in Ruhe befindlichen Kern ausführen [1]).

Im Falle der stationären Strömung wird aus der umgeformten Eulerschen Gleichung

$$\mathfrak{k} = \nabla\left(\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}\,v^2\right) + [\overline{\omega}\,(\overline{\omega}\,\mathfrak{s})] \quad \ldots \quad (4).$$

Für den letzteren Ausdruck kann man aber schreiben

$$[\overline{\omega}\,(\overline{\omega}\,\mathfrak{s})] = \overline{\omega}\cdot\mathfrak{s}\,\overline{\omega} - \mathfrak{s}\cdot\overline{\omega}^2 = -\nabla\,\frac{1}{2}\,r^2\,\omega^2 = -\nabla\,\frac{1}{2}\,u^2,$$

wo r den Abstand des Aufpunktes von der Drehachse bedeutet. Daher nimmt die Energiegleichung (Bernoullische Gleichung) für die stationäre Relativbewegung, deren Absolutbewegung wirbelfrei ist, bei Kräftefreiheit die Form an

$$H' = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2\,g} - \frac{r^2\,\omega^2}{2\,g} = \mathrm{konst} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - u^2}{2\,g} \quad \ldots \quad (5),$$

wobei der Wert der Konstanten im allgemeinen für die einzelnen Stromfäden verschieden ist. H' heißt auch die »relative Strömungsenergie« [2]). Da nun für die Relativgeschwindigkeit die Beziehung gilt

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{c} - \mathfrak{u}\,,$$

so folgt

$$v^2 = c^2 + u^2 - 2\,c_u\cdot u\,,$$

wenn c_u die Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit bedeutet.

---

[1]) C. Pfleiderer, Die Kreiselpumpen, Berlin 1924, S. 71.

[2]) Vergl. R. v. Mises, a. a. O. S. 75

Es ergibt sich also

$$H' = \frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} - \frac{u \cdot c_u}{g} = \text{konst.} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Die absolute Strömungsenergie wird daher

$$H = \frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} = \text{konst.} + \frac{u \cdot c_u}{g} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Legen wir die Drehachse in die z-Richtung und führen Zylinderkoordinaten ein, so erhalten wir für die relativen Wirbelkomponenten

$$w_r = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial z}\right), \quad w_\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right), \quad w_z = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right). \quad (8).$$

Die Beziehung $\mathfrak{w} = -\bar{\omega}$ führt dann auf die Gleichungen

$$\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial z_z}{\partial r}, \quad \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} = -2 r \omega + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \quad \ldots \quad (9).$$

In dem besonderen Fall, daß die Geschwindigkeiten längs eines Parallelkreises gleich sind $\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \varphi} = 0\right)$, ergibt sich

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} = -2 r \omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Eine Relativbewegung mit gleichen Geschwindigkeitskomponenten längs eines Parallelkreises kann nur bestehen, wenn das Moment der Komponente $v_u = v_\varphi$ lediglich von r abhängt[1]). Ist die Strömung gleichartig in Ebenen senkrecht zur Drehachse, so fallen die ersten beiden Gleichungen fort, und wir erhalten aus dem letzten Ausdruck für den Wirbelvektor mit

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -v_\varphi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = r v_r \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

die Differentialgleichung für die Stromfunktion der Relativströmung

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = 2\omega \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Spezielle Lösungen dieser Gleichung sind u. a. von W. Kucharsky zusammengestellt worden. Sie umfaßt natürlich auch den Fall, daß die Absolutbewegung nur sogen. Potentialwirbel enthält, deren Kerne nicht dem eigentlichen Störungsfeld angehören, die aber die Zirkulationen um die Schaufelkonturen liefern.

3. Bestimmung der Kräfte und der theoretischen Leistung. Um nun einige allgemeine Aussagen über die Kräfte zu machen, die auf die rotierende Begrenzung einer Strömung übertragen werden, stellen wir uns ein Turbinenlaufrad vor, das durch Schaufeln in gleiche, für den Durchtritt der Flüssigkeit bestimmte Kanäle geteilt ist. Ohne zunächst bestimmtere Voraussetzungen über die Art der Strömung und die Gestalt der Schaufeln zu treffen, werden wir eine allgemeine vektorielle Betrachtungsweise an die Spitze stellen, d. h. eine dreidimensionale Bewegung der Flüssigkeit im Rade zulassen, um so die Bedeutung und den Geltungsbereich der grundlegenden Formeln besser übersehen zu können.

Die im vorigen Abschnitt eingeführte Unterscheidung der absoluten und relativen Strömung muß zunächst etwas schärfer gefaßt werden. Wenn die Relativströmung einen stationären Charakter hat, so gilt das offenbar nicht von der absoluten Strömung, da an einer bestimmten Stelle des absoluten Raumes innerhalb des Rades während der drehenden Bewegung des Systems einmal eine Schaufel, das andre Mal der Zwischenraum zwischen zwei Schaufeln erscheint. Die absolute Strömung ist also streng genommen nur periodisch stationär, da die Schaufeln kreissymmetrisch angeordnet sind. Wir können aber das absolute Strömungsbild immer auf dieselbe Stelle des Rades beziehen und so in bedingter Weise den stationären Charakter wieder zulassen.

Auch die Wirbelfreiheit der absoluten Strömung gilt nur für den mehrfach zusammenhängenden Raum außerhalb der Schaufeln. Ebenso wie eine Tragfläche gleichbedeutend ist mit der Existenz eines Zwanges oder einer Unstetigkeit des Geschwindigkeitsfeldes, d. h. mit einer Wirbelverteilung längs ihrer Begrenzung, so kann man sich

[1]) F. Prašil, Schweizer. Bauz. 48, 1906, S. 278 f.

auch die Radschauflen als Träger einer Wirbelschicht[1]) denken. Wir müssen also das absolute Geschwindigkeitsfeld als eine Ueberlagerung zweier Teilfelder

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}'$$

uns vorstellen, von denen $\mathfrak{c}_0$ das Feld der Geschwindigkeit bedeutet, welche die Flüssigkeit besitzen würde, wenn sie den Raum zwischen den äußeren Grenzen des Rades ohne Zwang durchfließen würde, während $\mathfrak{c}'$ durch das Vorhandensein der Schaufeln bedingt ist[2]). Da das Feld $\mathfrak{c}_0$ als wirbelfrei vorauszusetzen ist, so gilt die Beziehung

$$\text{rot}\,\mathfrak{c} = \text{rot}\,\mathfrak{c}'.$$

Nach den Ergebnissen der Tragflügeltheorie ist diese Rotation wesentlich für das Zustandekommen einer resultierenden Kraft. Man erhält nun unmittelbar nach der Prandtl[3])-Lagallyschen[4]) Formel für die Elementarkraft (pro Raumeinheit)

$$\mathfrak{k} = \varrho\,[\text{rot}\,\mathfrak{c}, \mathfrak{v}] \quad \ldots \ldots \quad (13),$$

wo $\mathfrak{v}$ wieder die auf den Schaufelkranz bezogene relative Geschwindigkeit bedeutet. Aus der Gleichung folgt, daß

$$\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{v} = 0$$

ist, die in einem Feldpunkt wirkende Kraft also auf der relativen Geschwindigkeitsrichtung senkrecht steht. Setzen wir nun wie oben

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{c} - \mathfrak{u} = \mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}' - \mathfrak{u},$$

so ergibt sich

$$\mathfrak{k}\,\mathfrak{u} = \mathfrak{k}\,\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{k}\,\mathfrak{c}'.$$

Wenn man den Wert für $\mathfrak{k}$ aus (13) einsetzt und den Wert von $\mathfrak{v}$ benutzt, so kommt

$$\mathfrak{k}\,\mathfrak{u} = \varrho\,[\text{rot}\,\mathfrak{c}, -\mathfrak{u}]\,(\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}') \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

und für die gesamte Leistung L, die auf die Flüssigkeit ausgeübt wird

$$L = \int \mathfrak{k}\,\mathfrak{u}\,d\tau = \varrho \int [\text{rot}\,\mathfrak{c}, -\mathfrak{u}]\,\mathfrak{c}\,d\tau \quad \ldots \ldots \quad (15),$$

wo das Integral über den von Flüssigkeit erfüllten Raum zu erstrecken ist. Wir können jetzt die durch den Ausdruck $\text{rot}\,\mathfrak{c} = 2\,\mathfrak{w}_a$ bezeichneten Wirbel in die von den Schaufeln getragenen Wirbel, die für jede Schaufel eine Zirkulation ergeben und die in der Flüssigkeit schwimmenden freien Wirbel zerlegen, also setzen

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_g + \mathfrak{w}_f.$$

Da die Achsen der freien Wirbel sich in die Geschwindigkeitsrichtung einstellen ($[\mathfrak{w}_f\,\mathfrak{v}] = 0$), die Kraft also nur von den gebundenen Wirbeln abhängt, so gewinnen wir für L den Ausdruck

$$L = 2\,\varrho \int [\mathfrak{w}_g, -\mathfrak{u}]\,(\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}')\,d\mathfrak{c} \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

Wenn man als Raumelement $d\mathfrak{c}$ einen Elementarzylinder mit dem Querschnitt df und der Höhe ds, dessen Achse mit der Achse der Wirbellinien $\mathfrak{w}_g$ zusammenfällt, so kann man im Integral $\mathfrak{w}_g$ und $d\mathfrak{s}$ miteinander vertauschen, also schreiben

$$L = 2\,\varrho \int [d\mathfrak{s}, -\mathfrak{u}]\,(\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}')\,\mathfrak{w}_g\,df \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

Nach dem Stokeschen Lehrsatz kann man ferner $\mathfrak{w}_g\,df$ durch die elementare Zirkulation $d\Gamma$ ersetzen. Wenn man z. B. in erster Annäherung jede Schaufel durch einen Wirbelfaden ersetzt, so hat man mit $\int \mathfrak{w}_g\,df = \Gamma$

$$L = \varrho \int [d\mathfrak{s}, -\mathfrak{u}]\,(\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}')\,\Gamma \quad \ldots \ldots \quad (18).$$

4. Die Grundgleichung der Turbinentheorie. Um die Formel für L in die klassische (Eulersche) Turbinenformel umzugestalten, nehmen wir im besonderen zylindrisch begrenzte Schaufeln mit sonst beliebiger Profilierung an, wie sie angenähert bei Radialturbinen und Kreiselpumpen realisiert sind. Dann sind alle Wirbelachsen der

[1]) Vergl. Wilh. Müller, Wirbelschichten und Zirkulationen, Zeitschr. für techn. Physik 1924, S. 450.

[2]) Vergl. E. Hahn, a. a. O. S. 428.

[3]) L. Prandtl, Tragflügeltheorie, I. u. II. Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1918 u. 1919.

[4]) M. Lagally, Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben, diese Zeitschr. 1922, S. 413.

Rotationsachse des Rades parallel und die Strömung kann in erster Annäherung als eben aufgefaßt werden. Wenn wir dem Rade die Erstreckung 1 in der Achsenrichtung beilegen und bedenken, daß der Vektor $[d\mathfrak{s}, -\mathfrak{u}]$ radial (zentrifugal) gerichtet ist, so hat man

$$L = 2\,\varrho\,\omega \int \mathfrak{r}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{w}_g\,df = 2\,\varrho\,\omega \int r\,c_r\,w_g\,df = \varrho\,\omega \int r\,c_r\,d\Gamma \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Nehmen wir etwa eine von innen nach außen gerichtete Beaufschlagung an (wie sie bei Kreiselpumpen vorkommt) und unterscheiden wir die Ein- und Austrittsradien des Rades, ebenso die entsprechenden Geschwindigkeiten durch den Indices 1 und 2, so ergibt sich

$$d\Gamma = d\,(r\,d\varphi\,c_u) = (r_2\,c_{u2} - r_1\,c_{u1})\,d\varphi .$$

Bei einer Fördermenge q hat man weiter

$$dq = r\,d\varphi \cdot c_r ,$$

also

$$L = \varrho \int (u_2\,c_{u2} - u_1\,c_{u1})\,dq = \frac{\varrho\,q}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} (u_2\,c_{u2} - u_1\,c_{u1})\,d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Das ist der allgemeine Ausdruck für die von der Pumpe übertragene Leistung. Bei einer unendlichen Schaufelzahl ist die Geschwindigkeit über dem Umfang eines innerhalb des Rades gezogenen konzentrischen Kreises, also auch längs des Eintritts- und Austrittskreises, gleichmäßig verteilt, und die Formel geht dann in die klassische Turbinenformel

$$L = \varrho\,q\,(u_2\,c_{u2} - u_1\,c_{u1}) \quad (21)$$

über. Bei rein radialem Eintritt der Flüssigkeit ist $c_{u1} = 0$ und wir haben

$$L = \varrho\,q\,u_2\,c_{u2} .$$

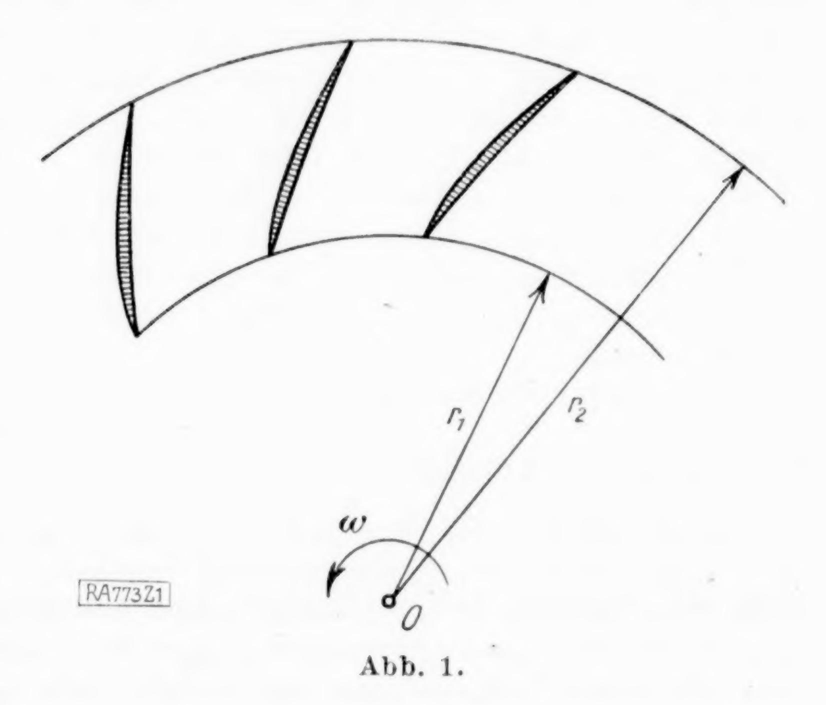


Abb. 1.

Die Formeln (20) und (21) bringen ohne weiteres den wichtigen Zusammenhang mit der Tragflügeltheorie zum Ausdruck[1]). Wir erhalten nämlich für das Drehmoment

$$M = \varrho \int (r_2\,c_{u2} - r_1\,c_{u1})\,dq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Wenn wir die absolute Zirkulation längs des Außenkreises mit Γ_2, längs des Innenkreises mit Γ_1 bezeichnen

$$r_2 \int_0^{2\pi} c_{u2}\,d\varphi = \Gamma_2 ; \qquad r_1 \int_0^{2\pi} c_{u1}\,d\varphi = \Gamma_1 ,$$

so haben wir

$$M = \frac{\varrho\,q}{2\,\pi}\,(\Gamma_2 - \Gamma_1) = \frac{\varrho\,q}{2\,\pi}\,\Gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Wenn ferner $(c_r)_m$ die mittlere Radialkomponente der Geschwindigkeit in einen mittleren Abstand r von der Achse bedeutet, so wird

$$q = 2\,\pi\,r\,(c_r)_m$$

und der Ausdruck für das Drehmoment geht über in

$$M = \varrho\,(c_r)_m\,\Gamma \cdot r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Man sieht also, daß die mittlere auf einen Punkt im Abstande r reduzierte Drehkraft die Joukowskysche Form hat. Die Zirkulation Γ ist nach allgemeinen Sätzen, absolut genommen, gleich der Summe der Zirkulationen um die einzelnen Schaufelprofile, die gewöhnlich den Charakter von Tragflächenquerschnitten haben (Abb. 1). Da für die Schaufeln Kongruenz und Kreisanordnung angenommen wurde, so ist bei n Schaufeln

$$\Gamma = n\,\Gamma_s ,$$

wenn Γ_s die Zirkulation einer Schaufel bedeutet.

[1]) Vergl. H. Föttinger, Ueber die physik. Grundlagen der Turbinen- und Propellerwirkung, Verhandlungen der Versammlung von Vertretern der Flugwissenschaften Göttingen, München 1911, Zeitschrift. für Flugt. und Motorl. 1912, S. 233 u. 246.

5. Aufstellung der Idealströmung für Punktschaufeln. Um die letzten Formeln auf direktem Weg abzuleiten, können wir von dem Strömungsfeld im Kreiselrad selbst ausgehen, das wir uns, ohne die Allgemeingültigkeit der Resultate zu gefährden, dadurch wesentlich vereinfachen, daß wir die Schaufeln durch lineare axial gerichtete Wirbelfäden ersetzen, die in gleichen Abständen auf einen Kreiszylinder vom Radius r verteilt sein mögen (Abb. 2). Die so definierte ebene Punktwirbelströmung[1]) hat man dann noch mit der sogen. Durchflußströmung zu überlagern, um ein Bild von der absoluten Strömung im Rade zu gewinnen. In Wirklichkeit wird die Flüssigkeit durch ein Saugrohr dem als Pumpe wirkenden Kreiselrad zugeführt. Auch diesen Zufluß kann man wieder aus einer einfachen linearen Quelle herleiten, die in der Achse des Rades über die durch den Abstand der Kränze gegebene Breite 1 angeordnet ist und deren Spur in der Ebene punktartig erscheint. Schließlich kann man auch noch die Wirkung eines vor dem Rade angeordneten festen Leitrades, das das Wasser in bestimmter Richtung dem Laufrade zuführen soll, dadurch Rechnung tragen, daß man die Quelle mit einer drallgebenden inneren Zirkulation Γ_0 verbindet, wodurch der ungestörte Durchfluß in logarithmischen Spiralen verläuft. Für die Zusammensetzung aus Zirkulations- und Durchflußströmung haben wir dann das komplexe Potential

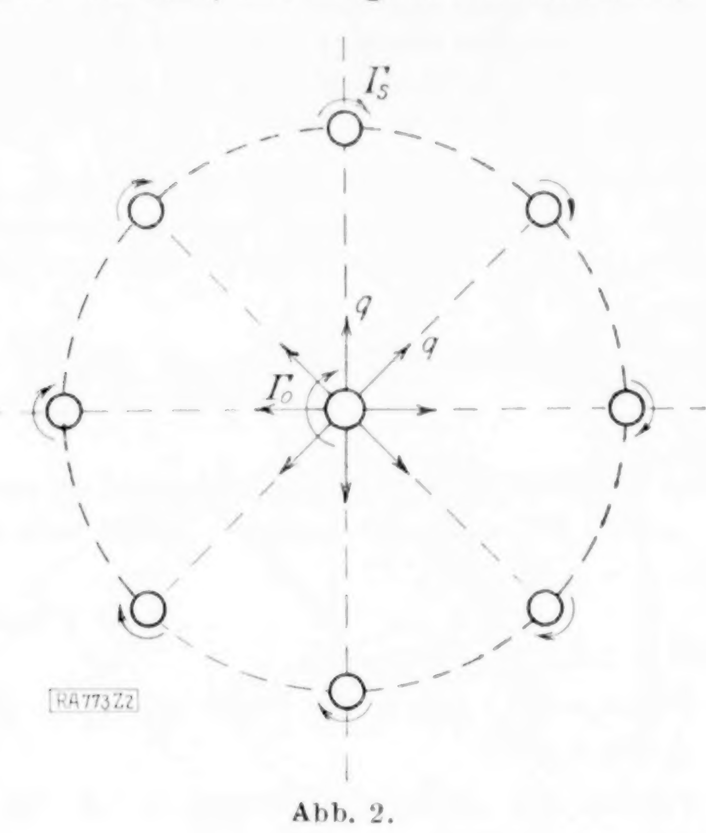


Abb. 2.

$$W = \frac{i\,\Gamma_s}{2\,\pi} \ln\left(z^n - r^n\right) + \frac{q + i\,\Gamma_0}{2\,\pi} \ln z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

dem die absolute Feldgeschwindigkeit entspricht

$$\bar{c} = \frac{d\,w}{d\,z} = \frac{i\,\Gamma_s}{2\,\pi}\,\frac{n\,z^{n-1}}{z^n - r^n} + \frac{q + i\,\Gamma_0}{2\,\pi\,z} = \frac{q + i\,(\Gamma_0 + n\,\Gamma_s)}{2\,\pi\,z} + \frac{i\,\Gamma_s\,n\,r^n}{2\,\pi\,z^{n+1}} + \ldots \quad . \quad . \quad (26).$$

Wenn wir etwa nach der Lagallyschen Formel das auf das Kreiselrad ausgeübte Drehmoment berechnen wollen, müssen wir die Wirbelquelle im Ursprung als äußere Singularität behandeln, also bei der Integration umgehen, die etwa über die Berandung eines mit dem Rade konzentrischen Ringgebiets zu erstrecken ist, dessen äußerer Radius $> r_2$ und dessen innerer Radius $< r_1$ ist. Dann ergibt sich

$$M + i\,N = -\frac{\varrho}{2} \int \bar{c}\,z\,dz$$

$$M = \frac{\varrho\,q\,(n\,\Gamma_s)}{2\,\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

also derselbe Ausdruck wie oben angegeben. Die Stromfunktion der relativen Strömung erhält man, wenn man die entgegengesetzte Drehströmung, d. h. den Ausdruck $\frac{1}{2}\,\omega\,\left|\,z\,\right|^2$ hinzufügt. Es wird dann

$$\Psi_r = \frac{\Gamma_0}{2\,\pi} \ln|z| + \frac{\Gamma_s}{2\,\pi} \ln|z^n - r^n| + \frac{q}{2\,\pi}\,\varphi + \frac{1}{2}\,\omega\,|z|^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Diese Funktion genügt in der Tat der oben aufgestellten Differentialgleichung.

6. Charakterisierung des allgemeinen Problems. Der gegebene Ansatz für die Strömung im Kreiselrad umfaßt zwar alle theoretisch möglichen Fälle; er ist aber zunächst rein formaler Natur und gewinnt erst dann konkrete Bedeutung, wenn es gelingt, ihn einem vorgegebenen Kreiselrad mit bestimmt profilierten Schaufeln anzupassen. Die Ermittlung der Strömung kommt auf die Lösung einer ersten und zweiten Randwertaufgabe hinaus, die W. Kucharski, W. Spannhake[2]) und E. Sörensen[3]) für spezielle

[1]) Vergl. Wilh. Müller, Zeitschrift. für techn. Physik, 1924, S. 451,

[2]) W. Spannhake, Leistungsaufnahme einer parallelkränzigen Zentrifugalpumpe mit radialen Schaufeln, Festschrift zur 100-Jahrfeier der techn. Hochschule Karlsruhe, Karlsruhe 1925, S. 387 bis 400.

[3]) E. Sörensen, Potentialströmungen durch rotierende Kreiselbäder, diese Ztschr. Bd. 7 (1927), S. 89.

Fälle durchgeführt haben. Der erste Anteil der Strömung, der bereits für den einfachen Fall bestimmt ist, kann als sogen. zirkulatorische Durchflußströmung bezeichnet werden. Sie umströmt die als ruhend anzusehenden Schaufeln so, daß deren Berandung mit zum System der Stromlinien gehört, und entfernt sich mit abnehmender Geschwindigkeit ins Unendliche.

Die Rotation des Schaufelsystems hat ferner eine sogen. Verdrängungsströmung der Flüssigkeit in der Umgebung zur Folge, die absolut und relativ zum Schaufelkranz betrachtet werden kann. In dem besonderen Fall der Punktschaufeln wird dieser Strömungsanteil gegenstandslos. Allgemein lautet die Grenzbedingung der absoluten Verdrängungsströmung dahin, daß die Komponente der Absolutgeschwindigkeit normal zum Schaufelelement mit der Normalkomponente der Drehgeschwindigkeit des Elementes übereinstimmt. Zieht man die reine Drehströmung ab, so erhält man das relative Geschwindigkeitsfeld, dessen Stromlinien den Schaufelkonturen folgen [1]). Wichtig ist nun, daß man die Grenzbedingungen in einer der Wirklichkeit angepaßten Form erweitern kann, um aus der Schaufelform die Größe der wirksamen Zirkulation abzuleiten. Indem man dabei ähnlich verfährt wie in der gewöhnlichen Tragflügeltheorie, d. h. verlangt, daß sowohl an den Eintritts- wie an den Austrittskanten der Schaufeln, die etwa wie der hintere Teil der Tragfläche beiderseits als scharfkantig vorausgesetzt werden sollen, die Geschwindigkeiten endlich bleiben, erhält man für die Zirkulationen Γ_0 und Γ_s Ausdrücke, in denen außer den Abmessungen resp. Formelelementen des Schaufelrades sowohl die Fördermenge q als auch die Drehgeschwindigkeit ω enthalten sind. Bei drallfreiem Eintritt ($\Gamma_0 = 0$) oder bei vorn abgerundeter Form des Schaufelprofils kann man jedenfalls aus der Forderung des glatten Abströmens die Zirkulation um die Schaufeln ermitteln. Eine solche zwangläufige, in der Eigenart der Schaufelung begründete Ermittlung von Γ_s kann geradezu als das eigentliche strömungstheoretische Turbinenproblem bezeichnet werden.

Beschränken wir uns zunächst auf diese wesentlich wirksame Zirkulation Γ_s, so können wir uns ein Urteil über die Funktion

$$\Gamma_s = \Gamma_s(\omega\, q)$$

bilden, wenn wir das Schaufelrad mit dem Idealfall eines aus unendlich vielen und unendlich kleinen, im übrigen gleichgestellten Schaufeln bestehenden Rades vergleichen. In diesem Falle rücken die auf dem Kreiszylinder angeordneten Wirbelfäden zu einer Wirbelschicht zusammen, die überall die gleiche Belegungsdichte aufweist. Wenn Γ' die Gesamtstärke der Wirbelschicht oder die »tragende« Zirkulation bedeutet, so erfährt die von ihr herrührende Geschwindigkeit, wie aus einer einfachen Rechnung hervorgeht, beim Uebergang vom Innen- in das Außengebiet einen Sprung 0 auf $\frac{\Gamma'}{2\pi r}$, und die Stromlinien erfahren eine plötzliche Richtungsänderung im Sinne von Γ'. Wenn man sich nun vorstellt, daß die unendlich kleinen geradlinigen rückwärtsgestellten Schaufelspuren mit den Radien vom Drehpunkt 0 aus einen Winkel α bilden (Abb. 3), der übrigens dem mittleren

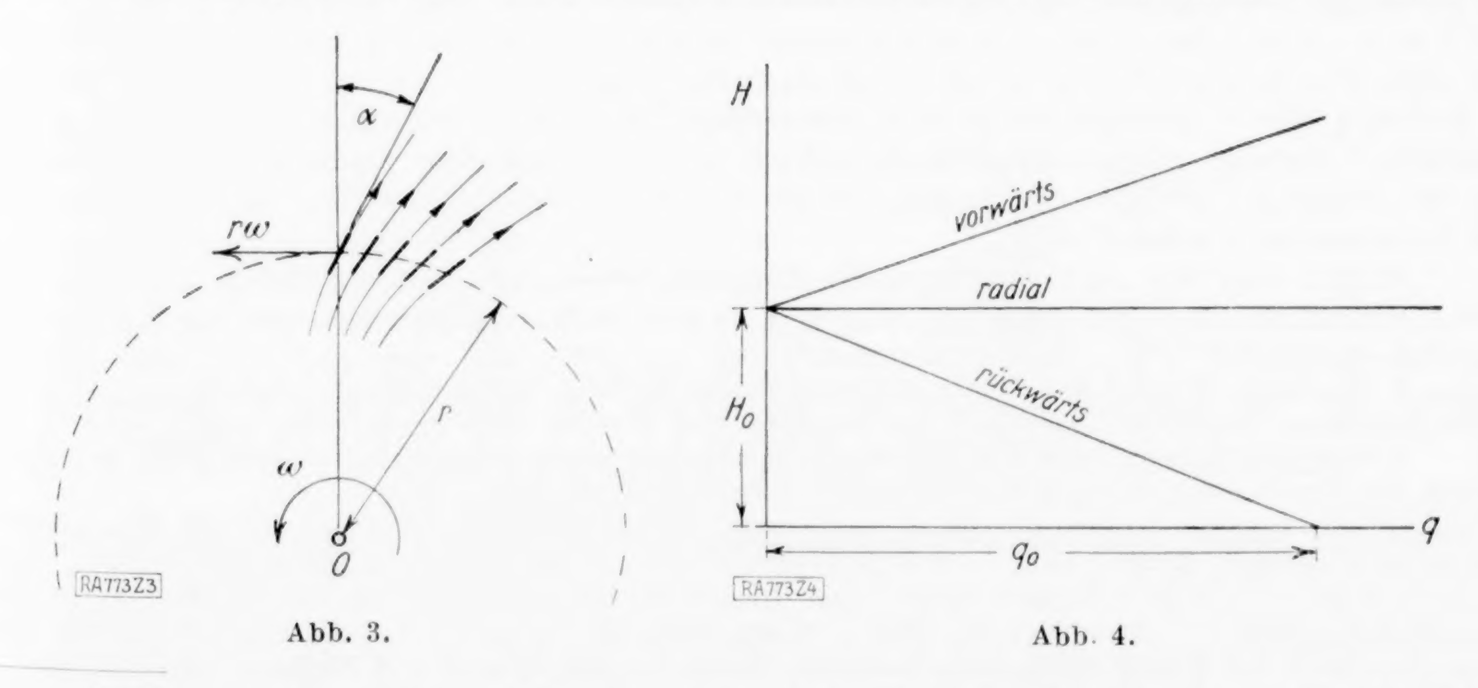


Abb. 3. Abb. 4.

[1]) Bilder von den einzelnen Strömungsanteilen sind enthalten in den Arbeiten: H. Oertli, Untersuchung der Wasserströmung durch ein rot. Zellen-Kreiselrad, Diss. Zürich, 1923; D. Pavel, Ebene Potentialströmungen durch Gitter und Kreiselräder, Zürich, Leipzig u. Stuttgart 1925.

Schaufelwinkel des wirklichen Rades entsprechen soll, so kann man für die absolute Zirkulation setzen

$$\Gamma = 2\pi r (r\omega) - \Gamma' = 2\pi r (r\omega) - q \operatorname{tg} \alpha .$$

Daher wird die Druckerhöhung

$$H = \frac{M\omega}{\gamma q} = \frac{M\omega}{Q} = \frac{(r\omega)^2}{g} - \frac{q \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega}{2\pi g} .$$

Bei vorwärts gestellten Schaufeln tritt an Stelle des negativen Zeichens das positive, so daß wir beide Fälle zusammenfassen können

$$\Gamma = 2\pi r (r\omega) \mp q \operatorname{tg} \alpha ; \quad H = \frac{(r\omega)^2}{g} \mp \frac{q \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega}{2\pi g} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (29).$$

Die Zirkulation und die Druckerhöhung hängen also in linearer Weise von der Fördermenge q ab (Abb. 4). Die qH-Kurve ist eine gerade Linie, welche die q- resp. H-Achse in den Punkten

$$H = 0, \; q_0 = \frac{2\pi\omega r^2}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad q = 0, \; H_0 = \frac{(r\omega)^2}{g}$$

schneiden.

Bei einer endlichen Anzahl von Schaufeln hat die Druckerhöhung H und die Zirkulation, wie die spezielle Rechnung ergibt, die Form

$$H = \mu_0 \left[2\pi r^2 \omega \mp \frac{q \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega}{2\pi g} \right] = \mu_0 H_\infty, \quad \Gamma = \mu_0 \Gamma_\infty \quad . \; . \; . \; . \quad (30),$$

wenn wir radiale Eintrittsrichtung und sonst dieselbe Schaufelstellung wie im Idealfalle $n = \infty$, ferner $r_2 = r$ voraussetzen. Dabei ist μ_0 eine Zahl < 1, die als Maß für die Leistung der Turbine resp. der Zentrifugalpumpe im Verhältnis zu dem Fall unendlich vieler Schaufeln betrachtet und als Gütegrad bezeichnet werden kann[1]).

In der Tat ergibt sich, wenn man $H = 0$ setzt,

$$0 = \frac{\varrho}{2\pi} \int_0^{2\pi} r\omega c_u \, d\varphi = \frac{\varrho}{2\pi} \int r\omega (r\omega - v_r \operatorname{tg} \alpha) \, d\varphi , \qquad \frac{2\pi r^2 \omega}{\operatorname{tg} \alpha} = (q_0)_\infty = \int v_r r \, d\varphi = (q_0)_n ,$$

in beiden Vergleichsfällen derselbe Wert von q, wenn im Falle der endlichen Schaufelzahl der Winkel α den mittleren Austrittswinkel der Relativströmung aus den Schaufelkanälen bedeutet. 773

Zur Theorie elastisch gelagerter Konstruktionen.[2])

Von **WILLY PRAGER** in Darmstadt.

Gerade in den letzten Jahren hat die Theorie elastisch gestützter Konstruktionen durch eine ganze Reihe von Arbeiten wesentliche Förderung erfahren[3]). Mit alleiniger Ausnahme von Wieghardt gehen jedoch die Verfasser dieser Arbeiten aus von der schon von Winkler[4]) gemachten Annahme der Proportionalität zwischen Einsenkung der Unterlage an einer bestimmten Stelle und der an dieser Stelle übertragenen Pressung, während in Wirklichkeit auch die Pressung an benachbarten Stellen zur Einsenkung beitragen wird, allerdings um so weniger, je weiter diese Stellen von der betrachteten entfernt sind.

Wählt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem so, daß x- und y-Achse in die ebene Oberfläche der Unterlage zu liegen kommen, während die z-Achse ins Innere der

[1]) Br. Eck, Beitrag zur Turbinentheorie, Werft, Reederei, Hafen 1925, S. 199—207. — Von demselben Verfasser: Wasserkraftmaschinen in Forschung und Theorie, Zeitschr. f. techn. Physik, 1926, S. 23.

[2]) Gekürzte Fassung der von der Technischen Hochschule Darmstadt zur Erlangung der venia legendi für das Fachgebiet Mechanik genehmigten Habilitationsschrift.

[3]) Von neueren Veröffentlichungen seien nur erwähnt: Hayashi: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, Berlin 1921. — Wieghardt: Ueber den Balken auf nachgiebiger Unterlage, diese Zeitschr. 1922. — Lewe: Platten rechteckiger Grundrißteilung auf elastisch nachgiebiger Unterlage, Bauingenieur 1923. — Schleicher: Ueber Kreisplatten auf elastischer Unterlage, Festschrift zur Hundertjahrfeier der Techn. Hochschule Karlsruhe 1925. — Sanden und Schleicher: Zur Theorie des Balkens auf elastischer Unterlage, Beton und Eisen 1926, Heft 5. — Pasternak: Die baustatische Theorie biegefester Balken und Platten auf elastischer Bettung, Beton und Eisen 1926, Heft 9 und 10.

[4]) Winkler: Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit 1867, S. 182.

Unterlage weist, und bezeichnet die Verschiebungskomponenten des Punktes x, y, z mit ξ, η, ζ, so lautet der Winklersche Ansatz für eine elastisch gelagerte Platte:

$$\zeta_0(x, y) = k \cdot p(x, y) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

wobei durch den Index 0 hervorgehoben wird, daß es sich um einen Punkt der Oberfläche der Unterlage handelt; $p(x, y)$ bedeutet die an der Stelle $x, y, 0$ auf die Unterlage übertragene Pressung, die Konstante k wird als »Bettungsziffer« bezeichnet. Die Bettungsziffer wird gewöhnlich als eine dem Boden eigentümliche Konstante angesehen. Engesser[1]) hat jedoch darauf hingewiesen, daß die Bettungsziffer auch von der Form und Größe der belasteten Fläche abhängig sein muß. Dem Winklerschen Ansatz ist der von Wieghardt eingeführte vorzuziehen[2]):

$$\zeta_0(x, y) = \iint K(x, y;\ u, v) \cdot p(u, v) \cdot du \cdot dv \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Die Integration ist über die gesamte belastete Oberfläche zu erstrecken. In dieser Integralgleichung bedeutet der »Kern« (»Einflußfunktion«) $K(x, y;\ u, v)$ die Einsenkung an der Stelle x, y infolge der Belastungseinheit an der Stelle u, v, der Integrand also den Beitrag, den die Belastung $p(u, v) \cdot du \cdot dv$ des Oberflächenelements $du \cdot dv$ zur Einsenkung an der Stelle x, y liefert. Zu der Gl. (2) tritt noch der durch die elastischen Eigenschaften der auf der Unterlage ruhenden Platte gegebene Zusammenhang hinzu:

$$\frac{m^2 E}{m^2 - 1} \cdot \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta_0}{\partial y^4} \right) = q(x, y) - p(x, y) \quad \ldots \quad (3),$$

worin h die Plattenstärke bedeutet, m und E die Poissonzahl bzw. den Elastizitätsmodul des Plattenmaterials und $q(x, y)$ die auf die Plattenoberseite wirkende Belastung.

Dient der elastische Halbraum als Unterlage, so ist die Einflußfunktion nach Boussinesq:

$$K(x, y;\ u, v) = \frac{m'^2 - 1}{m'^2 \cdot \pi \cdot E'} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Hier bedeuten m' und E' die Poissonzahl bzw. den Elastizitätsmodul der Unterlage. Die Lösung des Gleichungssystems (2), (3) mit dem Kern (4) dürfte jedoch im allgemeinen kaum durchführbar sein. Auch folgt aus den von A. Föppl[3]) im Hofe seines Laboratoriums angestellten Versuchen, daß die Einsenkung $K(x, y;\ u, v)$ mit wachsender Entfernung der Punkte x, y und u, v rascher abnimmt, als dies dem Ansatz (4) entspricht, d. h. daß der Erdboden nicht als elastischer Halbraum angesehen werden kann. Wieghardt macht daher für die Einflußfunktion die Annahme:

$$K(x, y;\ u, v) = c \cdot e^{-k \cdot \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}} \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

worin c eine Bodenkonstante ist. Diese Annahme ist zwar plausibel, jedoch bis zu einem gewissen Grade willkürlich; bestimmend für diese Wahl der Einflußfunktion ist der Umstand gewesen, daß mit dem Kern (5) die Gl. (2) verhältnismäßig leicht lösbar ist. Vorzuziehen wäre dieser willkürlichen Annahme auf jeden Fall eine strenge Lösung des Gleichungssystems (2), (3) mit dem Kern (4), wenn auch feststeht, daß der Erdboden sich nicht wie ein elastischer Halbraum verhält. Für gewisse, allerdings ziemlich spezielle Fälle läßt sich nun eine strenge Lösung ohne allzu große Schwierigkeiten geben.

Abb. 1.

Wir betrachten das folgende ebene Problem: Auf der unendlichen elastischen Halbscheibe, dem Baugrund, liegt ein unendlich langer, elastischer Streifen von der Höhe h, der Fundamentkörper. Die Belastung der oberen Begrenzung dieses Streifens sei als gerade periodische Funktion mit der Periode $2l$ vorausgesetzt:

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{n \pi x}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Mit der aus Abb. 1 ersichtlichen Bezeichnungsweise hat man dann folgende Randbedingungen:

[1]) Engesser: Zur Theorie des Baugrunds, Zentralblatt der Bauverwaltung 1893.

[2]) Da hier hauptsächlich die elastisch gelagerte Platte behandelt wird, wurde der von Wieghardt für den Balken gegebene Ansatz gleich entsprechend erweitert.

[3]) A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik 1920/21 Bd. III, S. 259, und Bd. V, S. 236.

a) für $z = 0$ ist:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{xz} = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_z = -q \\ \text{b) für } z = h \text{ und } z' = 0 \text{ ist:} \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}' = 0\,, \quad \sigma_z = \sigma_z'\,, \quad \zeta = \zeta' \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (7),$$

c) für $z' = \infty$ müssen Spannungen und Formänderungen endlich sein.

Für den ebenen Formänderungszustand ($\eta = 0$, $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$) gelten beim Fehlen von Massenkräften die Gleichgewichtsbedingungen[1]):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Aus ihnen folgt, wie Airy bemerkt hat, daß die Spannungen sich durch die zweiten Ableitungen der »Spannungsfunktion« $F(x, z)$ ausdrücken lassen:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\,; \qquad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,; \qquad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Bezeichnet man die Volumdehnung mit e, so gelten folgende Beziehungen zwischen Spannungen und Formänderungen:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_x = 2\,G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right), & \sigma_y = 2\,G \cdot \frac{e}{m-2} \\ \sigma_z = 2\,G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right), & \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) \\ \text{mit} \quad e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

Durch Addition der ersten und dritten Gleichung erhält man:

$$\sigma_x + \sigma_z = \Delta F = 2\,G \cdot \frac{m}{m-2} \cdot e \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Führt man noch die Drehung:

$$\omega = {}^1/_2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)$$

ein, so erhalten die Gleichgewichtsbedingungen (8) die Form:

$$2\,G \cdot \frac{m-1}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} - 2\,G \cdot \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0\,, \qquad 2\,G \cdot \frac{m-1}{m-2} \cdot \frac{\partial e}{\partial z} + 2\,G \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad . \quad (12).$$

Diese Gleichungen haben die Form der bekannten Cauchy-Riemannschen Bedingungen, es läßt sich also:

$$2\,G \cdot \frac{m-1}{m-2} \cdot e + 2\,G \cdot \omega \cdot i = E + i\Omega$$

als Funktion einer komplexen Veränderlichen

$$w = x + i\,z$$

ansehen, d. h. man findet die Drehung ω, indem man die zu $E = 2\,G \cdot \frac{m-1}{m-2}$ konjugiert harmonische Funktion durch $2\,G$ dividiert. Die Volumdehnung e kann aber nach Gl. (11) aus der Spannungsfunktion berechnet werden. Kennt man e und ω, so können die Verschiebungen ermittelt werden aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = e = \frac{m-2}{2\,G\,(m-1)}\,E\,; \quad -\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 2\,\omega = \frac{1}{G} \cdot \Omega \quad \ldots \quad (13).$$

Ist nämlich:

$$\int (E + i\Omega) \cdot d\,w = \varphi + i\,\psi\,,$$

also:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = E = \frac{m-1}{m} \cdot \Delta F \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\Omega \quad . \quad . \quad (14),$$

so ist:

$$2\,G \cdot \xi = -\frac{\partial F}{\partial x} + \varphi - u \quad \text{und} \quad 2\,G \cdot \zeta = -\frac{\partial F}{\partial z} + \psi + v \quad . \quad . \quad (15),$$

---

[1]) Zu den folgenden allgemeinen Ausführungen über den ebenen Formänderungszustand vergl. Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität.

wo u und v konjugiert harmonische Funktionen sind, so daß

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ist. Von der Richtigkeit der Gleichungen (15) kann man sich durch Differentiieren und Einsetzen in Gl. (13) überzeugen, wobei die Bedingungen (14) zu berücksichtigen sind; die willkürlichen harmonischen Funktionen u und v fallen vermöge der oben angeführten Cauchy-Riemannschen Gleichungen heraus.

Da die Volumdehnung e eine harmonische Funktion ist, hat man;

$$\Delta e = \frac{m-2}{2\,G \cdot m} \cdot \Delta \Delta F = 0$$

also:

$$\Delta \Delta F = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

d. h. die Spannungsfunktion ist biharmonisch.

Bei dem vorliegenden Problem ist nun aus Symmetriegründen längs der Geraden:

$$x = 0\,, \qquad x = \pm\, 2\,l\,, \qquad x = \pm\, 4\,l\,, \; \ldots$$

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0.$$

Diese Forderungen werden erfüllt durch den Ansatz:

$$F(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \cdot \cos \frac{n\,\pi\,x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Die Bedingung (16) führt zu der Differentialgleichung:

$$f_n^{\mathrm{IV}}(z) - 2 \cdot \frac{n^2\,\pi^2}{l^2} \cdot f_n''(z) + \frac{n^4\,\pi^4}{l^4} \cdot f_n(z) = 0$$

mit der Lösung:

$$f_n(z) = A_n \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{n\,\pi\,z}{l} + B_n \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{n\,\pi\,z}{l} + C_n \cdot z \cdot \mathfrak{Cof}\,\frac{n\,\pi\,z}{l} + D_n \cdot z \cdot \mathfrak{Sin}\,\frac{n\,\pi\,z}{l} \quad (17\,\text{a}).$$

Da durch den Ansatz (17) die Symmetriebedingungen des Problems sowohl hinsichtlich der Spannungen als auch der Formänderungen erfüllt werden, müssen die in Gl. (15) auftretenden willkürlichen harmonischen Funktionen u und v für sich allein ebenfalls diesen Bedingungen genügen.

Unter Berücksichtigung dieses Umstandes erhält man für die Spannungen und Formänderungen des Fundamentkörpers die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \cdot \cos \alpha_n x \left[A_n \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z + B_n \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z + C_n \left(z \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z + \frac{2}{\alpha_n}\,\mathfrak{Sin}\,\alpha_n z\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. + D_n \left(z \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z + \frac{2}{\alpha_n} \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z\right)\right]\\
\sigma_z &= -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \cdot \cos \alpha_n x \,(A_n \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z + B_n \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z + C_n \cdot z \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z\\
&\qquad\qquad + D_n \cdot z \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z)\\
\tau_{xz} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \cdot \sin \alpha_n x \left[A_n \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z + B_n \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z + C_n \cdot \left(z \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z + \frac{1}{\alpha_n} \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. + D_n \cdot \left(z \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z + \frac{1}{\alpha_n} \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z\right)\right]\\
\xi &= \frac{1}{2\,G} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \sin \alpha_n x \left[A_n \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z + B_n \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z + C_n \cdot \left(z \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z + \right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. + 2\,\frac{m-1}{m \cdot \alpha_n} \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z\right) + D_n \cdot \left(z \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z + 2\,\frac{m-1}{m \cdot \alpha_n} \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z\right)\right]\\
\zeta &= -\frac{1}{2\,G} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \cos \alpha_n x \left[A_n \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z + B_n \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z + C_n \left(z \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z - \right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left. - \frac{m-2}{m \cdot \alpha_n} \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z\right) + D_n \left(z \cdot \mathfrak{Cof}\,\alpha_n z - \frac{m-2}{m \cdot \alpha_n} \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha_n z\right)\right]
\end{aligned}\right\} \quad (18),$$

worin zur Abkürzung $\frac{n\,\pi}{l} = \alpha_n$ gesetzt ist.

Für die Unterlage gelten die gleichen Beziehungen, jedoch mit anderen Konstanten A_n', B_n', C_n' und D_n'. Aus den Randbedingungen (7) können die Konstanten berechnet werden, man erhält:

$$
\left.
\begin{aligned}
A_n &= \frac{a_n \cdot l^2}{n^2 \cdot \pi^2} = \frac{a_n}{\alpha_n^2} \\
B_n &= -\frac{a_n}{\alpha_n^2} \cdot \frac{K \cdot \mathfrak{Sin}^2\, \alpha_n h + \mathfrak{Sin}\, \alpha_n h\, \mathfrak{Cof}\, \alpha_n h + \alpha_n h}{K \cdot (\mathfrak{Sin}\, \alpha_n h \cdot \mathfrak{Cof}\, \alpha_n h + \alpha_n h) + \mathfrak{Sin}^2\, \alpha_n h - \alpha_n^2 h^2} \\
C_n &= -\alpha_n \cdot B_n \\
D_n &= -\frac{a_n}{\alpha_n} \cdot \frac{K \cdot \mathfrak{Sin}\, \alpha_n h\, \mathfrak{Cof}\, \alpha_n h + \mathfrak{Sin}^2\, \alpha_n h}{K \cdot (\mathfrak{Sin}\, \alpha_n h\, \mathfrak{Cof}\, \alpha_n h + \alpha_n h) + \mathfrak{Sin}^2\, \alpha_n h - \alpha_n^2 h^2} \\
A'_n &= \frac{a_n}{\alpha_n^2} \cdot \frac{K (\mathfrak{Sin}\, \alpha_n h + \alpha_n h\, \mathfrak{Cof}\, \alpha_n h)}{K (\mathfrak{Sin}\, \alpha_n h \cdot \mathfrak{Cof}\, \alpha_n h + \alpha_n h) + \mathfrak{Sin}^2\, \alpha_n h - \alpha_n^2 h^2}
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots \quad (19)
$$

wo:

$$
K = \frac{G'}{G} \cdot \frac{\dfrac{m-1}{m}}{\dfrac{m'-1}{m'}}
$$

bedeutet

Die Konstanten B_n' C_n' und D_n' haben für die Bestimmung des Bettungsdrucks $p(x)$ keine Bedeutung. Setzt man:

$$
c_n = \frac{K (\mathfrak{Sin}\, \alpha_n h\, \alpha_n h + \mathfrak{Cof}\, \alpha_n h)}{K (\mathfrak{Sin}\, \alpha_n h\, \mathfrak{Cof}\, \alpha_n h + \alpha_n h) + \mathfrak{Sin}^2\, \alpha_n h - \alpha_n^2 h^2} \quad \ldots \quad (19\text{a}),
$$

so erhält man für den Bettungsdruck:

$$
p(x) = -\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot c_n \cdot \cos \alpha_n x\right) \quad \ldots \quad (20),
$$

für die Querkraft auf die Tiefe »eins« des Fundamentkörpers:

$$
Q(x) = -\int_0^h \tau_{xz} \cdot d z = + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\alpha_n} (1 - c_n) \sin \alpha_n x \quad \ldots \quad (20\text{a}),
$$

für die Axialkraft:

$$
N(x) = + \int_0^h \sigma_x \cdot d z = 0 \quad \ldots \quad (20\text{b})
$$

und für das Biegemoment:

$$
M(x) = \int_0^h \sigma_x \cdot z \cdot d z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\alpha_n^2} \cdot (1 - c_n) \cdot \cos \alpha_n x \quad \ldots \quad (20\text{c}).
$$

Wie die später (Zahlentafel 2) gegebenen Zahlen zeigen, nimmt c_n mit wachsendem n ab, und zwar um so rascher, je größer das Verhältnis h/l und je kleiner K ist. Unter Umständen werden daher in Gl. (20) die unter dem Summenzeichen stehenden Glieder gegenüber der Konstanten $a_0/2$ verschwinden, so daß bei wachsendem h/l die Bettungsdruckverteilung immer gleichmäßiger wird, während die Abweichung der Bettungsdruckverteilung von der gleichmäßigen $p = a_0/2$ immer mehr einem Cosinusgesetz folgt, da die höheren Glieder unter dem Summenzeichen gegenüber dem ersten wiederum vernachlässigt werden können.

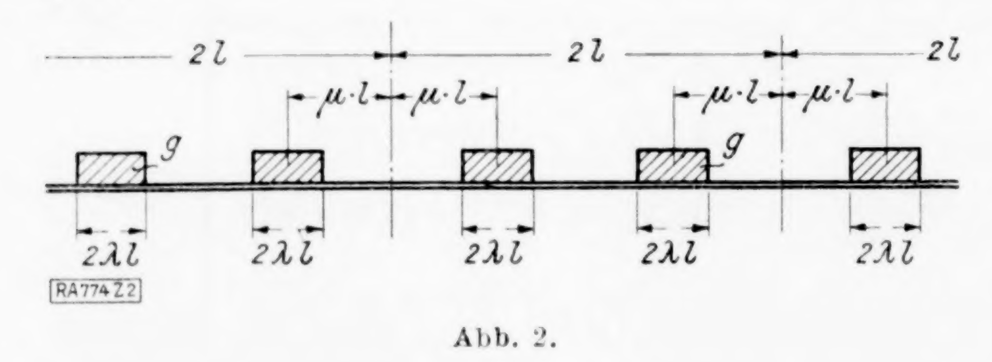


Abb. 2.

Weitergehende praktische Bedeutung haben allerdings die Gleichungen (20) nicht, da sie sich nur auf einen unendlich langen Fundamentkörper und periodische Belastung beziehen. Durch einen von Schwedler[1]) herrührenden Kunstgriff gelingt es jedoch wenigstens für gewisse Belastungsfälle, sich von diesen Einschränkungen frei zu machen. Verwendet man nämlich die in Abb. 2 wiedergegebene Belastungsart, so ist nach Gl. (20a) die Querkraft in den Schnitten

$$
x = \pm l; \qquad x = \pm 3\, l; \qquad x = \pm 5\, l \ldots\ldots
$$

[1]) Schwedler: On Iron Permanent Way. Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers 1882.

gleich null und durch zweckmäßige Bestimmung der Größe μ hat man es in der Hand, auch das Biegemoment in diesen Schnitten verschwinden zu lassen. Dann kann man aber an diesen Stellen den Balken aufschneiden und erhält so die strenge Lösung für das in Abb. 3 wiedergegebene Problem. Eine derartige Belastung kann z. B. bei einer Grundplatte auftreten, die zwei gleiche Wände trägt und überstehende Enden hat [1]).

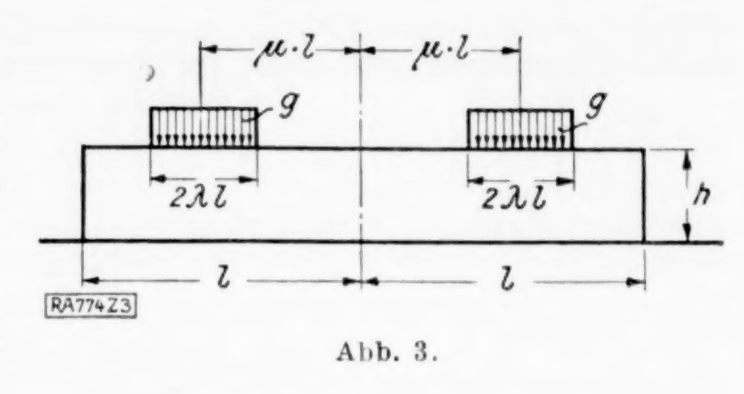


Abb. 3.

Die Fourier-Entwicklung der Belastung nach Abb. 2 ergibt:

$$q(x) = 2\lambda g + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4g}{\pi \cdot n} \cdot \sin n\pi\lambda \cdot \cos n\pi\mu \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \quad . \; . \; . \quad (21).$$

Für das Biegemoment an der Stelle $x = 1$ erhält man:

$$M_l = \frac{4gl^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \cdot (1 - c_n) \cdot \sin n\pi\lambda \cdot \cos n\pi\mu \quad . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Man faßt diesen Ausdruck als Funktion von μ auf und bestimmt die Nullstelle. Auf diese Weise wurden die in Zahlentafel 1 zusammengestellten und zum Teil in Abb. 4 wiedergegebenen Fälle durchgerechnet und zwar für Beton auf festem Kies; soweit man aus den wenigen veröffentlichten Messungen [2]) schließen kann, wird hier $K = 0{,}0005 - 0{,}001$ sein. Man erhält für den Bettungsdruck und das Biegemoment folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= g\left(2\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4c_n}{\pi \cdot n} \cdot \sin n\pi\lambda \cdot \cos n\pi\mu \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}\right) \\ \text{und:} \quad M(x) &= g\,l^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-c_n)}{\pi^3 \cdot n^3} \cdot \sin n\pi\lambda \cdot \cos n\pi\mu \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (23).$$

Hierin ist c_n nach Gl. (19a) eine Funktion von $\alpha_n h$ also nur von dem Verhältnis h/l abhängig; die ersten zehn Werte von c_n sind für verschiedene Fälle in Zahlentafel 2 zusammengestellt.

Bemerkenswert ist, daß man für geometrisch ähnliche Fundamente und Belastungen auch ähnliche Bettungsdruckverteilungen erhält, was ja bekanntlich bei Zugrundelegung der Winklerschen Annahme nicht der Fall ist.

Selbstverständlich kann man neben der hier betrachteten Belastungsart noch andere Belastungen so zusammenstellen, daß in gewissen Schnitten Querkraft und Biegemoment verschwinden. Eine allgemeine Lösung läßt sich jedoch auf diese Weise nicht erzielen, man erhält stets nur Sonderfälle von größerer oder geringerer praktischer Bedeutung. Eine allgemeine Lösung hätte zurzeit auch nur geringen Wert, da ein Vergleich mit den Ergebnissen der Winklerschen Theorie mangels Zahlenunterlagen (Beziehung zwischen den hier verwendeten Konstanten und der Bettungsziffer) nicht durchzuführen ist.

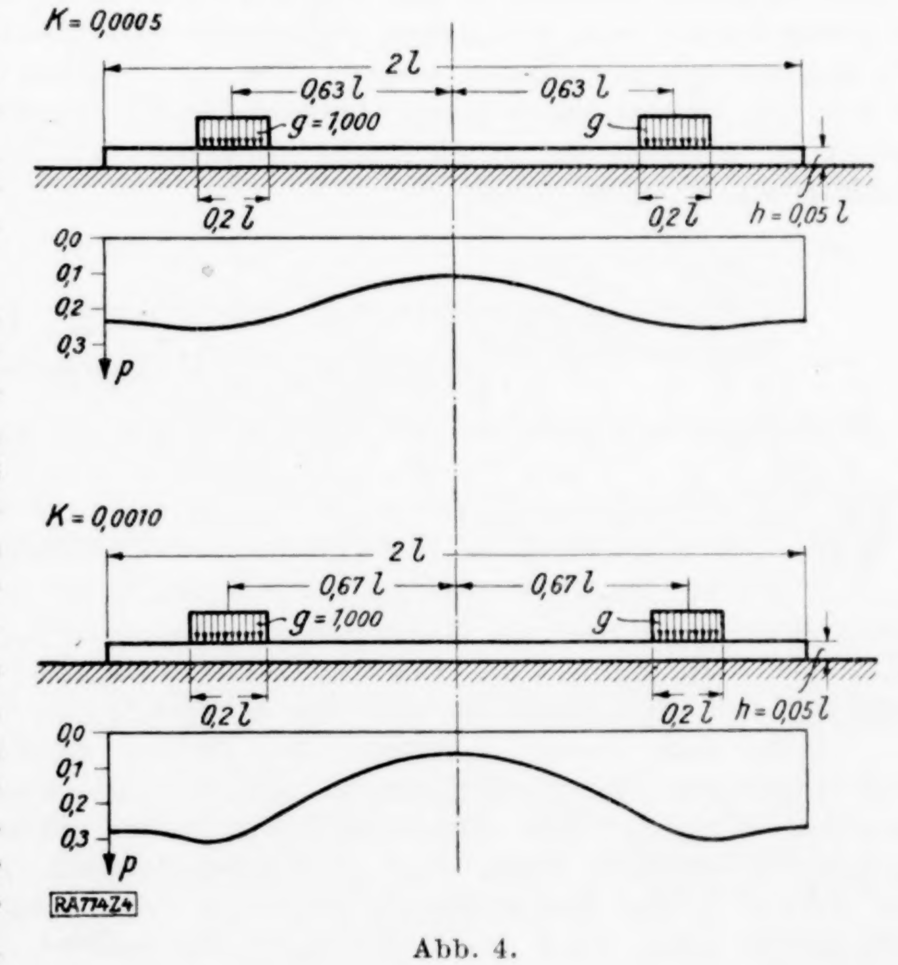


Abb. 4.

[1]) Durch tiefgehende, glatte Spundwände an den Enden der Platte können auch die Randbedingungen für den Boden verwirklicht werden.

[2]) Vergl. z. B. Schleicher: Zur Theorie des Baugrundes. Bauingenieur 1926. Heft 48/49.

Zahlentafel 1.

	$K = 0{,}0005$				$K = 0{,}0010$			
	$h/l = 0{,}05$; $\mu = 0{,}63$		$h/l = 0{,}10$; $\mu = 0{,}58$		$h/l = 0{,}05$; $\mu = 0{,}67$		$h/l = 0{,}10$; $\mu = 0{,}59$	
Faktor	$p = g\,x$	$M = g\,l^2\,x$	$p = g\,x$	$M = g\,l^2\,x$	$p = g\,x$	$M = g\,l^2\,x$	$p = g\,x$	$M = g\,l^2\,x$
$x/l = 0{,}0$	0,114	− 0,0119	0,188	− 0,0144	0,055	− 0,0088	0,176	− 0,0140
1	119	109	189	135	068	085	178	132
2	134	092	191	106	088	075	182	105
3	158	060	195	059	123	056	190	060
4	189	014	200	+ 0,0008	170	025	199	+ 0,0004
0,5	223	+ 0,0054	205	092	226	+ 0,0024	209	086
6	250	115	207	132	280	088	214	130
7	258	104	207	092	305	104	214	095
8	250	048	206	039	297	056	212	041
9	242	012	205	010	278	013	210	011
1,0	239	000	204	000	272	000	209	000

Zahlentafel 2.

n	$K = 0{,}0005$ $h/l = 0{,}05$	$K = 0{,}0005$ $h/l = 0{,}10$	$K = 0{,}0010$ $h/l = 0{,}05$	$K = 0{,}0010$ $h/l = 0{,}10$
1	0,45601	0,09128	0,62638	0,16729
2	09128	01285	16729	02537
3	02911	00417	05658	00831
4	01285	00195	02537	00388
5	00688	00110	01366	00220
6	00417	00070	00831	00140
7	00276	00048	00550	00097
8	00195	00035	00388	00069
9	00144	00026	00287	00051
10	00110	00019	00220	00039

Auch steht von vornherein fest, daß der Erdboden nicht als elastischer Halbraum angesehen werden kann; sein wirkliches Verhalten wird vielmehr zwischen dem hier und dem von Winkler vorausgesetzten liegen. Die vorstehende Arbeit soll auch gar nicht eine neue, praktisch verwendbare Berechnungsmethode elastisch gelagerter Konstruktionen geben, sondern lediglich auf einen Punkt hinweisen, an dem experimentelle Untersuchungen mit Erfolg einsetzen können. 774

Berechnung und Messung der inneren Verluste periodisch belasteter Körper.

Von **W. SPÄTH** in Barmen.

Wird ein fester Körper sich wiederholenden Belastungen ausgesetzt, so geht ein Teil der aufgewandten Deformationsarbeit durch Verluste im Material verloren. Versuche hierüber wurden hauptsächlich an tordierten Stäben angestellt, die durch eine Schwungmasse zu einem Schwingungssystem ergänzt wurden. Die Dämpfung der Eigenschwingungen eines solchen Systems ist abhängig von dem Material, von der Temperatur, von der Frequenz und der Amplitude.

In der Technik treten nun häufig Konstruktionselemente auf, deren Eigenschwingungen durch periodische Impulse zu kräftigen Resonanzschwingungen erregt werden können. Die Beanspruchung dieser Elemente durch Schwingungsbelastungen hängt in starkem Maße von der Dämpfungsfähigkeit des Materials ab. So machte O. Föppl[1]) die Beobachtung, daß ein mit 21 kg/mm² Belastung periodisch tordierter Probestab etwa nach zwei Millionen Beanspruchungen brach. Ein zweiter Probestab

[1]) O. Föppl, Grundzüge der Technischen Schwingungslehre. Berlin 1923, Julius Springer. S. 118.

dagegen, der bei einem bedeutend kleineren periodischen Impuls eine Beanspruchung von 32 kg/mm² erlitt, brach bereits nach 50000 Schwingungen, obgleich das Material des zweiten Stabes eine erheblich höhere Festigkeit aufwies.

Der Dämpfungsfähigkeit eines Materials kommt also erhebliche praktische Bedeutung zu. Das Ziel vorliegender Arbeit ist nun, die Vorgänge in periodisch beanspruchten Körpern in einfache Formeln zu fassen, die das Verhalten der Stoffe möglichst genau beschreiben. Diese Formeln sollen das Verhalten eines Konstruktionselements bei jeder Frequenz im voraus zu berechnen gestatten, außerdem geben sie Wege an, die charakteristischen Materialkonstanten zu messen.

Es bestehen hauptsächlich zwei Theorien zur Erklärung der Eigendämpfung[1]). Die eine nimmt eine Viskosität oder innere Reibung in festen Körpern an, und ist besonders von W. Voigt ausgeführt worden. Diese Annahme führt zu dem Resultat, daß das logarithmische Dekrement der Dämpfung umgekehrt proportional der Schwingungszeit anwächst. Die Theorie von Maxwell und Boltzmann unter Berücksichtigung der Relaxation bzw. Nachwirkung ergibt eine Unabhängigkeit der Dämpfung von der Schwingungszeit.

Bei den angestellten Versuchen zeigte sich, daß bei den meisten Stoffen das logarithmische Dekrement der Dämpfung mit der Schwingungsdauer etwas abnimmt.

1. Reibungsverluste. In Uebereinstimmung mit der Reibungstheorie wird das Vorhandensein einer Reibungskraft angenommen, doch wird in Rücksicht auf das Folgende eine von der Darstellung von W. Voigt abweichende Berechnungsart zugrunde gelegt. Der Koeffizient der inneren Reibung sei η, definiert durch die Kraft, die der Bewegung einer Schicht von der Flächeneinheit dadurch entgegenwirkt, daß die Schicht im Abstand 1 von einer ruhenden Schicht mit der Geschwindigkeit 1 parallel bewegt wird. Die Kraft sei im C.G.S.-System gemessen.

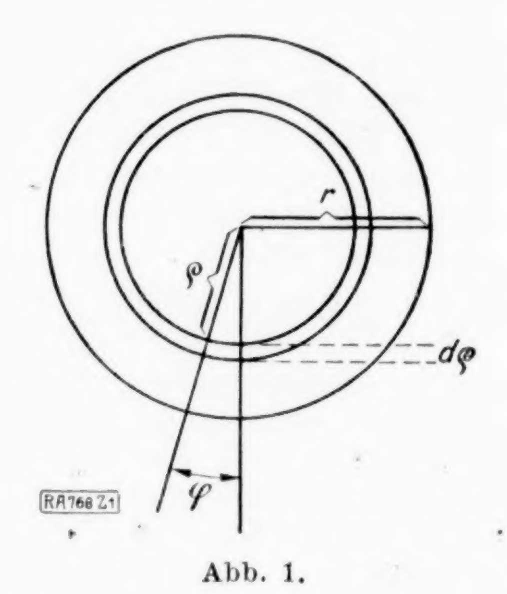


Abb. 1.

In Abb. 1 ist der Querschnitt eines Zylinders dargestellt mit dem Radius r und der Länge l. Dieser Zylinder sei in Elementarröhren vom Radius ϱ und der Dicke $d\varrho$ geteilt. Wird die obere Endfläche einer solchen Elementarröhre mit der Geschwindigkeit u gegen die untere Endfläche bewegt, so ist die hierbei zu überwindende Reibungskraft:

$$d p = \eta \frac{u}{l} \cdot 2\pi \cdot \varrho \cdot d\varrho .$$

Bezeichnet u_0 die Geschwindigkeit in einem beliebigen Zeitpunkt am Umfang des Zylinders, so ist:

$$u = u_0 \frac{\varrho}{r} ,$$

also:

$$d p = \eta \cdot \frac{u_0}{l} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot 2\pi\varrho \cdot d\varrho .$$

Die Geschwindigkeit u_0 verändere sich nach einer Sinusfunktion mit dem Maximalwert U_0, dann ist:

$$u_0 = U_0 \sin \omega t .$$

U_0 ist also der Maximalwert der Geschwindigkeit beim Durchgang durch die Nullage und die entsprechende Maximalkraft ist:

$$d P = \eta \frac{U_0}{l} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot 2\pi\varrho \cdot d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Die in einer Sekunde von der Reibungskraft in einer Elementarröhre geleistete Arbeit ist:

$$d R = \frac{1}{2} \cdot d P \cdot U_0 \cdot \frac{\varrho}{r}$$

Somit:

$$d R = \frac{1}{2} \cdot \eta \cdot \frac{U_0}{l} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot 2\pi \cdot \varrho \cdot d\varrho \cdot U_0 \frac{\varrho}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

[1]) Vergl. den zusammenfassenden Bericht von Th. v. Kármán, Physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre. Enzyklopädie d. Math. Wissensch. Bd. IV, Mechanik.

Die vom ganzen Zylinder geleistete Reibungsarbeit ist:

$$R = \pi \cdot \eta \cdot \frac{U_0^2}{l \cdot r^2} \cdot \int\limits_{\varrho=0}^{\varrho=r} \varrho^3 \, d\varrho ,$$

$$R = \frac{\pi}{4} \cdot \eta \cdot \frac{U_0^2}{l} \cdot r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ist φ der maximale Verdrehungswinkel und ω die Schwingungsfrequenz in 2π Sekunden, so läßt sich auch schreiben:

$$U_0 = \omega \cdot r \cdot \varphi$$

und damit:

$$R = \frac{\pi}{4} \cdot \eta \cdot \omega^2 \cdot \varphi^2 \frac{r^4}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

oder da:

$$\delta = \frac{\varphi \cdot r}{l} ,$$

wo δ den Scheerungswinkel bezeichnet:

$$R = {}^1/_4 \cdot \eta \cdot \omega^2 \cdot \delta^2 \cdot V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

worin V das Volumen des Zylinders ist. Der Ausdruck (5) gibt also die im ganzen Zylinder in einer Sekunde durch Reibung vernichtete Arbeit an, die als Wärme erscheint.

Ist c die spezifische Wärme des Körpers, s das spezifische Gewicht und bezeichnet Δt_r die Zunahme der Temperatur pro Sekunde, so ist die in einer Elementarröhre erzeugte Wärmemenge:

$$w_r = 4{,}188 \cdot 10^7 \cdot c \cdot s \cdot 2\pi \cdot \varrho \cdot d\varrho \cdot l \cdot \Delta t_r \cdot Erg.$$

Durch Gleichsetzung von w_r mit dR ergibt sich Δt_r zu:

$$\Delta t_r = \frac{\eta}{2} \cdot \frac{1}{4{,}188 \cdot 10^7} \cdot \frac{\omega^2 \cdot \varphi^2}{l^2 \cdot c \cdot s} \cdot \varrho^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Wenn die durch Reibung im Körper erzeugte Wärme sich nicht sofort ausgleichen würde, so wäre also die Erhöhung der Temperatur in einem Zylinder durch Reibung allein, proportional dem Quadrat der Entfernung von der Achse, ferner proportional dem Quadrat der Frequenz und dem Quadrat des Torsionswinkels. Die äußeren Schichten eines tordierten Zylinders werden also bei Beginn eines Dauerversuches wesentlich wärmer als das Innere und es setzt eine starke Wärmeleitung nach dem Inneren des Körpers ein.

Der Zylinder nach Abb. 1 hat eine Direktionskraft:

$$D = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^4}{l} \cdot \Phi ,$$

worin Φ den Torsionsmodul im C. G. S.-System bedeutet. Um diesen Zylinder um den Winkel φ zu tordieren, ist das Drehmoment:

$$\mathfrak{D} = D \cdot \varphi$$

nötig, und die bei der Verdrehung aufgewandte Arbeit ist:

$$A = {}^1/_2 \cdot D \cdot \varphi^2 .$$

Diese Formel gilt allerdings nur so lange, als die Direktionskraft proportional mit dem Torsionswinkel φ anwächst.

Das logarithmische Dekrement der Dämpfung ϑ_r der von dem Zylinder ausgeführten Eigenschwingungen ist bekanntlich gleich dem halben Quotienten aus der pro Periode vernichteten Energie zum Arbeitsvorrat, der zu einer bestimmten Zeit im Schwingungssystem steckt. Es läßt sich also die durch die Reibung verursachte Dämpfung bestimmen zu:

$$\vartheta_r = {}^1/_2 \cdot \frac{R \cdot T}{{}^1/_2 \, D \cdot \varphi^2} .$$

Die entsprechenden Werte eingesetzt, ergibt:

$$\vartheta_r = \frac{2\,\pi^2}{T} \cdot \frac{\eta}{\Phi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

worin T die Schwingungszeit bedeutet. Es ergibt sich also das bekannte Resultat, daß die Annahme einer inneren Reibung eine Dämpfung umgekehrt proportional der Schwin-

gungszeit liefert. Im Gegensatz zur Theorie von W. Voigt ist die Dämpfung außerdem umgekehrt proportional mit dem Torsionsmodul Φ, wie dies sich schon aus Dimensionsbetrachtungen ergeben muß, denn:

$$\frac{\eta}{T \cdot \Phi} = \frac{\text{Dyn} \cdot \text{cm}^{-2}\,\text{sec}}{\text{Dyn} \cdot \text{cm}^{-2}\,\text{sec}}$$

somit eine reine Zahl.

Bekanntlich ist die Abhängigkeit der Dämpfung umgekehrt proportional mit der Schwingungszeit durch die Versuche nicht bestätigt worden, so daß die Annahme einer Reibungskraft allein die tatsächlichen Verhältnisse nicht völlig zu beschreiben vermag.

2. Spannungsverluste. Um eine weitere Annäherung der Theorie an das tatsächliche Verhalten der Stoffe zu erreichen, wird nun angenommen, daß außer den Reibungsverlusten noch andere Verluste vorhanden sind, die nicht von der Geschwindigkeit der Verdrehung, sondern von dem jeweiligen Absolutwert der Verdrehung abhängen. Diese Annahme setzt die Erscheinungen der Relaxation bzw. der Nachwirkung formal in Rechnung und entspricht etwa der Darstellung der Verluste eines elektrisch geladenen Kondensators in Abhängigkeit von der angelegten Spannung.

Die Reibungsverluste während eines Verdrehungszyklus sind am größten, wenn der schwingende Körper mit maximaler Geschwindigkeit durch die Nullage schwingt, sie sind dagegen Null, wenn der Körper seine maximale Deformation erreicht hat. Es werden also weitere Verluste in die Rechnung eingeführt, die am größten sind, wenn der Körper seine maximale Deformation aufweist, und die Null sind, wenn der Körper durch die Nullage schwingt.

Der Reibungskoeffizient η läßt sich auch definieren als die doppelte Arbeit, die während eines Verdrehungszyklus pro Volumeinheit geleistet wird, wenn der Maximalwert der sinusförmig schwankenden Scheerungswinkelgeschwindigkeit 1 beträgt.

In analoger Weise wird ein Spannungsverlustkoeffizient ε eingeführt, definiert durch die doppelte Arbeit (in Erg), die während eines Verdrehungszyklus pro Volumeinheit geleistet wird, wenn der Maximalwert des sinusförmig schwankenden Scheerungswinkels 1 beträgt.

Die in einer Elementarröhre pro Sekunde erzeugte Arbeit ist dann:

$$d\,S = {}^1/_2 \cdot \varepsilon \cdot 2\,\pi\,\varrho \cdot d\,\varrho \cdot l \cdot n\,\frac{\varphi^2 \cdot \varrho^2}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

worin n die Anzahl der Verdrehungszyklen pro Sekunde bedeutet. Diese Arbeit wird wiederum in Wärme verwandelt und läßt sich darstellen als:

$$w_s = 4{,}188 \cdot 10^7 \cdot c \cdot s \cdot 2\,\pi\,\varrho \cdot d\,\varrho \cdot l \cdot \Delta\,t_s,$$

so daß sich jetzt die sekundliche Temperaturzunahme der Elementarröhre berechnet zu:

$$\Delta\,t_s = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{4{,}188 \cdot 10^7} \cdot \frac{\varphi^2 \cdot n}{c \cdot l^2 \cdot s} \cdot \varrho^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Die sekundliche Temperaturerhöhung durch die Spannungsverluste allein ist also nur linear proportional mit der Frequenz.

Die im ganzen Körper pro Sekunde geleistete Arbeit berechnet sich zu:

$$S = \pi \cdot \varepsilon \cdot n/l \cdot \varphi^2 \int_{\varrho=0}^{\varrho=r} \varrho^3\,d\,\varrho$$

$$S = \pi/4 \cdot \varepsilon \cdot n \cdot \varphi^2 \cdot \frac{r^4}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

oder durch Einführung des Scheerungswinkels:

$$S = {}^1/_4 \cdot \varepsilon \cdot n \cdot \delta^2 \cdot V \qquad \text{oder} \qquad S = \frac{1}{8\,\pi} \cdot \varepsilon \cdot \omega \cdot \delta^2 \cdot V \quad \ldots \quad (11).$$

Das logarithmische Dekrement der Dämpfung durch die Spannungsverluste allein beträgt:

$$\vartheta_s = {}^1/_2 \cdot \varepsilon/\Phi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

und ist also unabhängig von der Frequenz.

3. Reibungsverluste und Spannungsverluste. Um zu einer befriedigenden Darstellung der wirklichen Verhältnisse zu gelangen, wird nun angenommen, daß bei einer wiederholten Belastung eines Körpers Reibungsverluste und Spannungsverluste unabhängig von einander entstehen und daß ihre Wirkungen sich addieren.

Diese Rechnung ist im folgenden durchgeführt und es werden insbesondere die entsprechenden Formeln für die sekundliche Temperaturzunahme, für die Dämpfung und die Gesamtverluste aufgestellt In diese Formeln gehen der Reibungskoeffizient und der Spannungsverlustkoeffizient ein, deren Bestimmung für die einzelnen Stoffe noch zu leisten ist. Es wird deshalb jeweils mit der Ableitung der verschiedenen Formeln, deren Verwendbarkeit zur praktischen Bestimmung der Koeffizienten diskutiert.

a) Temperaturverhältnisse. Die pro Elementarröhre in einer Sekunde insgesamt in Wärme verwandelte Energie ist:

$$d R + d S = 2 \pi \varrho \cdot d \varrho \cdot \frac{\varphi^2 \cdot \varrho^2}{l} \left[\frac{\eta}{2} \cdot \omega^2 + \frac{\varepsilon}{4 \pi} \omega \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (13).$$

Entsprechend berechnet sich die sekundliche Temperaturzunahme insgesamt:

$$\varDelta t = \frac{1}{4{,}188 \cdot 10^7} \cdot \frac{\varphi^2 \cdot \varrho^2}{l^2} \cdot \frac{1}{c \cdot s} \left[\frac{\eta}{2} \omega^2 + \frac{\varepsilon}{4 \pi} \cdot \omega \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (14).$$

Die Temperaturzunahme pro Sekunde in einem wiederholt verdrehten Körper nimmt also unter der Annahme, daß kein Wärmeaustausch stattfindet, proportional mit dem Quadrat des Abstandes von der Achse, ferner mit dem Quadrat des Torsionswinkels zu. Mit der Frequenz steigt die Temperatur in den einzelnen Elementarröhren nach einem Ausdruck, der die Frequenz quadratisch und linear enthält.

Die experimentelle Messung der sekundlichen Temperaturzunahme, die übrigens erst bei höheren Frequenzen merklich in Erscheinung tritt, dürfte sich kaum zur Untersuchung der Stoffe eignen. Die wirkliche Temperaturzunahme ist sehr schwer zu erfassen, da der Körper im Wärmeaustausch mit der Umgebung steht. Ferner besteht im Körper selbst ein starkes Temperaturgefälle nach der Achse hin, dem allerdings durch Verwendung von Hohlzylindern mit dünner Wand begegnet werden könnte.

Die Hauptschwierigkeit liegt jedoch darin, daß erfahrungsgemäß die inneren Verluste und damit auch die sekundliche Temperaturzunahme sehr stark von der Temperatur selbst abhängen, und daß diese Abhängigkeit besonders groß ist gerade in dem für die Messungen in Betracht kommenden Intervall von 0 bis 100 Grad. Die Temperaturzunahme ist also selbst wieder eine Funktion der in einem bestimmten Augenblick herrschenden Temperatur.

b) Dämpfung. Das gesamte logarithmische Dekrement stellt sich als Summe der Einzeldämpfungen dar, also:

$$\vartheta = \frac{2 \pi^2}{T} \cdot \eta / \Phi + {}^1/_2 \cdot \varepsilon / \Phi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15).$$

Die Gesamtdämpfung ergibt sich also aus zwei Bestandteilen, von denen der eine unabhängig von der Frequenz ist, der andere dagegen proportional mit der Frequenz anwächst. Dieses Resultat steht im Einklang mit den Beobachtungen. Es kann von vornherein angenommen werden, daß die einzelnen Stoffe sehr verschiedene Koeffizienten η und ε besitzen, so daß beliebige Annäherungen an die beiden extremen Fälle, daß die Dämpfung unabhängig von der Frequenz bzw. linear mit ihr anwächst, erhalten werden können.

Zur Messung der Dämpfung kommen hauptsächlich zwei Methoden in Frage. Die eine besteht darin, daß ein den Probekörper enthaltendes Schwingungssystem angestoßen, und die Abnahme der Ausschläge während des Ausschwingens gemessen wird. Diese Methode ist ohne weiteres nur für sehr langsame Eigenschwingungen zu gebrauchen, also beispielsweise zur Untersuchung dünner Drähte. Für schnellere Schwingungen, die nicht mehr mit dem Auge verfolgt werden können, kommen komplizierte optisch-photographische Einrichtungen in Frage. Außerdem machen sich störende Erscheinungen, die die Eigendämpfung größer erscheinen lassen, bemerkbar.

Die zweite in Frage kommende Dämpfungsmessung besteht in der Aufnahme einer vollständigen Resonanzkurve des Schwingungssystems. Es wird hierbei der Ausschlag des Schwingungssystems in Abhängigkeit von der Frequenz gemessen, und aus der so erhaltenen Resonanzkurve kann die Dämpfung bestimmt werden. Diese Methode setzt die Möglichkeit der Erregung des Schwingungssystems mit verschiedener Frequenz voraus, wodurch sich in den meisten Fällen eine komplizierte Anordnung ergeben dürfte. Außerdem sind die in Frage kommenden kleinen Dämpfungen nur sehr ungenau zu messen, da kleine unvermeidliche Schwankungen der Erregerfrequenz eine sehr starke Aenderung des Ausschlages verursachen.

c) Verluste. Die Gesamtverluste in einem tordierten Körper pro Sekunde sind:

$$R + S = {}^1/_4 \cdot \delta^2 \cdot V \left[\eta \cdot \omega^2 + \frac{1}{2\pi} \cdot \varepsilon \cdot \omega\right] \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

Sie stellen sich also dar als die Summe zweier Teile, von denen der eine proportional mit dem Quadrat der Frequenz, der andere proportional mit der Frequenz anwächst.

Es sei nun angenommen, daß die Gesamtverluste durch eine einfache Meßmethode bestimmt werden können, so bleibt noch die Aufgabe zu lösen, diese Gesamtverluste in die Reibungs- und Spannungsverlustanteile zu zerlegen bzw. die beiden Faktoren η und ε zu bestimmen.

Berücksichtigt man, daß $\omega = 2\pi \cdot n$ und dividiert die Gl. (16) auf beiden Seiten durch n, so erhält man die Gesamtverluste pro Schwingungszyklus:

$$\frac{R+S}{n} = {}^1/_4 \cdot \delta^2 \cdot V\,[4\,\pi^2 \cdot \eta \cdot n + \varepsilon] \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

Setzt man ferner:

$$\delta^2 \cdot V \cdot \pi^2 \cdot \eta = c_1 \quad \text{und} \quad {}^1/_4 \cdot \delta^2 \cdot V \cdot \varepsilon = c_2,$$

so erhält man die Verluste pro Zyklus in der Form:

$$\frac{R+S}{n} = c_1 \cdot n + c_2 \quad \ldots \ldots \quad (18).$$

Trägt man nun die Verluste pro Zyklus $\frac{R+S}{n}$ als Ordinaten zu der Abszisse n auf, so erhält man eine gerade Linie (Abb. 2), deren Abschnitt auf der Ordinatenachse c_2 ergibt. Durch Multiplikation von c_2 mit einer beliebigen Frequenz wird der jeweilige Spannungsverlust gefunden. Damit sind auch die Reibungsverluste bestimmbar, so daß die Trennung der Gesamtverluste in die beiden Bestandteile für jede Frequenz möglich ist.

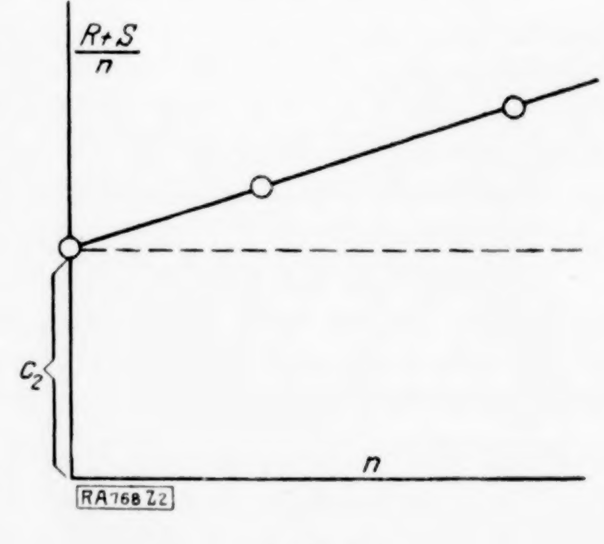


Abb. 2.

Die Messung der beiden Koeffizienten η und ε kann also praktisch auf folgende Weise erfolgen:

Man bestimmt die Gesamtverluste eines periodisch tordierten Körpers für zwei verschiedene Frequenzen bei sonst konstant gehaltenen Verhältnissen und trägt die durch n dividierten Werte als Ordinaten zu n als Abszisse auf. Der Schnittpunkt der Verbindungslinie der beiden so erhaltenen Punkte mit der Ordinatenachse ergibt c_2, und damit durch Rechnung auch c_1. Aus den beiden Werten für c_1 und c_2 können die Koeffizienten η und ε bestimmt werden.

Die Methode zur Trennung der beiden Verlustanteile ist dem in der Elektrotechnik gebräuchlichen Verfahren zur Trennung der Wirbelstrom- und Hysteresisverlusten im Eisen nachgebildet, die ebenfalls quadratisch bzw. linear mit der Frequenz des Wechselstromes anwachsen.

Ueber die praktische Ausführung der Messung der Gesamtverluste soll in einer besonderen Arbeit berichtet werden. 768

Über eine genäherte Integration der Gleichung linearer Wärmeleitung bei linear von der Temperatur abhängiger Wärmeleitfähigkeit und zeitlich periodischem Temperaturverlauf.

Von **H. KORNFELD** in Hörde.

(Aus der Versuchsanstalt Hörde der Vereinigten Stahlwerke.)

In der Praxis der Wärmeingenieure von Eisenhüttenbetrieben tritt beim Studium der Wärmeübergänge an eisenhüttenmännischen Oefen die Frage nach der Wärmeabgabe bzw. der Wärmespeicherung einseitig periodisch beheizter Wände (Ofenwände, Gewölbe) auf. Ihre Klärung ist neben der Erkenntnis des Wärmeüberganges von Verbrennungsgas auf das Schmelz- bzw. Walzgut wesentlich zur Beurteilung der Ausnutzung der aufgebrachten Wärmeenergie.

Die Temperaturspannen zwischen beheizter und unbeheizter Fläche der Wände sind im normalen Falle so groß (meist mehr als 1000° C), daß mit der Abhängigkeit des Wärmeleitvermögens der feuerfesten Baustoffe von der Temperatur — der Aenderungsbereich hat eine Breite von mehr als 100 vH des kleinsten Wertes — gerechnet werden muß. Die übrigen Stoffeigenschaften, spez. Wärme c und Dichte ϱ, können in erster Näherung als konstant angesehen werden. Unter diesen Verhältnissen bleibt die Wärmeleitungsgleichung nicht mehr linear; man muß sich mit mehr oder weniger idealisierenden Näherungsmethoden bei der Ermittlung des Temperaturverlaufs behelfen.

Die Berücksichtigung der Veränderlichkeit des Leitvermögens geschieht in primitivster Weise so, daß man eine durch eine überschlagsmäßig gewonnene mittlere Temperaturverteilung in der Wand gegebene mittlere Leitfähigkeit als Materialkonstante annimmt und damit nach bekannten Methoden rechnet [1]).

Ein weiterführender Weg ist von C. Schwarz [2]) gegangen worden; er benutzt die volle Temperaturabhängigkeit des Leitvermögens zur Bestimmung des den mittleren Temperaturen auf Innen- und Außenfläche entsprechenden stationären Temperaturverlaufs, dann ermittelt er die diesem überlagerte Temperaturschwingung für die in mehrere Schichten unterteilte Wand, wobei jeder dieser Schichten der über den in ihr liegenden stationären Temperaturverlauf erstreckte Mittelwert der Leitfähigkeit als Materialkonstante zugeschrieben wird.

Die einfache Mittelbildung beim ersten Verfahren, wie hier die Willkür in der Unterteilung der Wand in Schichten konstanten Leitvermögens bringen eine nicht zu unterschätzende Fehlermöglichkeit mit sich. In der Tat zeigen die Ergebnisse der beiden angegebenen Verfahren bei ein und demselben Beispiel (Gewölbe eines Martinofens) beträchtliche Abweichungen in ihren Aussagen über die Schwankung des Wärmeflusses gegenüber dem eines dritten Verfahrens, das hier entwickelt werden soll und die Willkür in der Unterteilung der Wand durch den Uebergang zur differentiellen Schicht vermeidet [3]).

Bezüglich der Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit bei den hauptsächlichsten Baustoffen, Silika und Schamotte, ist festzustellen, daß sie in hohem Maße linear ist [4]). Sie sei daher für das Folgende gegeben durch

$$l = l_1 \vartheta + l_2 \qquad (1),$$

wo ϑ die Temperatur, l_1 und l_2 dem Werkstoff eigentümliche Konstanten bedeuten mögen.

Wir behandeln das Beispiel einer einseitig gleichmäßig periodisch beheizten Wand, deren andere Seite an irgend ein Medium grenzen möge, wobei wir uns, da es sich in der Praxis zumeist um große Wandflächen handelt, auf das lineare Problem beschränken können. x sei die Raumkoordinate, die die Lage der Ebenen gleicher Temperatur angibt; die beheizte Seite liege bei $x = 0$, die andere bei $x = a$.

---

[1]) Siehe z. B. A. Schlüter, Mittlg. Nr. 83 der Wärmestelle des Vereins deutscher Eisenhüttenleute.

[2]) C. Schwarz, Zeitschr. f. techn. Physik, VI (1925), S. 457 u. 554.

[3]) Die Ergebnisse einiger numerischer Rechnungen und der Vergleich derselben für die drei Näherungsverfahren finden sich in der Zeitschrift für technische Physik VIII (1927), S. 178.

[4]) Nach Angaben von Meißner in Gehlhoff, Lehrbuch der technischen Physik, Leipzig 1924, S 234, die sich auf Messungen van Rinsum's stützen.

Der Temperaturverlauf auf der beheizten Seite lasse sich in Form einer Fourierreihe schreiben

$$\vartheta(0,t) = \overline{\vartheta(0)} + \sum_{\nu=1}^{n} C\, e^{i\omega_\nu t} \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

wo t die Zeit, das vorgezogene feste Glied $\overline{\vartheta(0)}$ die mittlere Temperatur der Heizfläche bedeuten.

Als Randbedingung auf der unbeheizten Seite kommt zunächst die Stetigkeit des Wärmeflusses in Frage; wir nehmen diese Bedingung in der Form an

$$\left[l(\vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right]_{x=a} = f \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Darin sei f eine Funktion der zu bestimmenden Integrationskonstanten wie der Zeit t und Größe a. Diese Form schließt den Uebergang zu gasförmigen, flüssigen oder festen Medien ein. Unter Umständen — im Falle der reinen Wärmeleitung ohne Konvektion und Strahlung — kann noch eine weitere Bedingung hinzukommen, die Stetigkeit der Temperatur in der Grenzfläche fordert,

$$\vartheta(a) = \vartheta^*(a) \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wo $\vartheta^*(x)$ die uns hier nicht weiter interessierende Darstellung des Temperaturverlaufs für $x \geqq a$ bedeutet.

Die Bedingung bezüglich des Wärmeflusses läßt sich in jedem Fall, sei es durch Vermittlung von $\vartheta(x)$ selber oder aber unter Benutzung von (4) und weiterer Bedingungen für den Bereich $x \geqq a$, auf die oben genannte Form bringen, so daß wir uns im folgenden für die unbeheizte Seite mit einer einzigen Bedingung der Form (3) begnügen können.

Die Lösung der hier nicht mehr linearen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(l\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right) = c\varrho\frac{\partial\vartheta}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

suchen wir durch einen Ansatz der Form

$$\vartheta(x,t) = \overline{\vartheta(x)} + \tau(x,t) \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

anzunähern. Dabei soll der nur von x abhängige Teil $\overline{\vartheta}$ (die mittlere Temperatur) den der mittleren Temperatur $\overline{\vartheta(0)}$ der beheizten Grenzfläche entsprechenden stationären Verlauf geben. Den periodischen Teil $\tau(x,t)$ bestimmen wir dann als Lösung einer Wärmeleitungsgleichung, bei der wir die Veränderlichkeit der Leitfähigkeit in der Weise berücksichtigen, als wir annehmen, sie sei in 1. Näherung durch Vermittlung von $\overline{\vartheta(x)}$ eine Funktion des Ortes, d. h. wir teilen die Wand in unendlich dünne Schichten konstanter Leitfähigkeit (Mittelbildung im Leitvermögen).

Das Verfahren ist streng nur im Grenzfalle unendlich kleiner Temperaturschwankungen in der Heizfläche, doch solange als Näherung anzusehen, als die Schwankung der Leitfähigkeit in der differentiellen Schicht von geringerer Größenordnung bleibt als der durch die stationäre Verteilung $\overline{\vartheta(x)}$ gegebene gesamte Aenderungsbereich.

1. Bestimmung von $\overline{\vartheta(x)}$. $\overline{\vartheta(x)}$ hat der Gleichung der stationären Wärmeleitung

$$\frac{d}{dx}\left(l\frac{d\overline{\vartheta}}{dx}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

zu genügen. Die Lösung schreibt sich, wie man durch eine einfache Rechnung einsieht, bei der Form (1) für das Leitvermögen

$$\overline{\vartheta(x)} = c_1 + \sqrt{c_3 - c_2 Q x} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo

$$c_1 = -\frac{l_2}{l_1}, \qquad c_2 = \frac{2}{l_1} \quad . \quad . \quad . \quad (8a),$$

und c_3 und Q Integrationskonstanten sind; Q hat die Bedeutung der transportierten Wärmemenge.

Die Randbedingungen sind hier

$$\overline{\vartheta(0)} = \text{const.}, \qquad \left[l(\vartheta)\frac{d\overline{\vartheta}}{dx}\right]_{x=a} = \varphi(c_3, Q, a) \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

wo φ eine aus der formalen Randbedingung durch Vermittlung von $\overline{\vartheta(x)}$ bzw. $\overline{\vartheta^*(x)}$ [stationärer Teil von $\vartheta^*(x)$] gegebene Funktion ist, in die die Integrationskonstanten eingehen.

2. Bestimmung von $\tau(x,t)$. Der periodische Teil $\tau(x,t)$ unserer Näherung hat nach den obigen Ausführungen die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(l(\vartheta)\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)=c\varrho\frac{\partial \tau}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

zu befriedigen.

Da er bezüglich der Zeitabhängigkeit die gleichen Perioden haben muß, wie die erzwingende Schwingung, suchen wir die allgemeine Lösung in der Form

$$T(x,t)=\sum_{\nu=1}^{n}T_\nu(x,t)=\sum_{\nu=1}^{n}v_\nu(x)\,e^{i\,\omega_\nu t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

zu gewinnen.

Gehen wir mit dem Ansatz (11) in (10) ein, so finden wir durch Koeffizientenvergleichung und nach Division durch $e^{i\,\omega_\nu t}$ für den Teil $v_\nu(x)$ der partikulären Integrale die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(L(x)\frac{d v_\nu}{dx}\right)=i\,\omega_\nu\,c\,\varrho\cdot v_\nu(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wo

$$L(x)=l[\vartheta(x)]=l_1\sqrt{c_3-c_2\,Q\,x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

In diese Gleichung führen wir anstelle von x die Größe

$$z={}^2/_3\,[L(x)]^{3/2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

als neue unabhängige Variable ein, wodurch wir erhalten

$$\frac{d^2 v_\nu}{dz^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{d v_\nu}{dz}-i\,k_\nu\,v_\nu=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Da bedeutet

$$k_\nu=4\,\frac{c\,\varrho\,\omega_\nu}{l_1^{\,4}\,c_2^{\,2}\,Q^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15a).$$

Schließlich gehen wir noch zu der neuen abhängigen Veränderlichen w_ν über durch

$$w_\nu=z^{-1/3}\cdot v_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und bringen dadurch die Gl. (15) auf die Form der bekannten Differentialgleichungen der Zylinderfunktionen

$$\frac{d^2 w_\nu}{dz^2}+\frac{1}{z}\,\frac{d w_\nu}{dz}-\frac{1}{9}\,\frac{w_\nu}{z^2}-i\,k_\nu\,w_\nu=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Diese hat als allgemeines Integral

$$w_\nu=A_\nu\,J_{1/3}\{z(-i\,k_\nu)^{1/2}\}+B_\nu\,J_{-1/3}\{z(-i\,k_\nu)^{1/2}\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

(A_ν und B_ν willkürliche Konstanten).

Damit wird dann schließlich [wegen (16)]

$$v_\nu=[L(x)]^{1/2}\{\gamma_\nu^{(1)}\,J_{1/3}[z(-i\,k_\nu)^{1/2}]+\gamma_\nu^{(2)}\,J_{-1/3}[z(-i\,k_\nu)^{1/2}]\} \quad . \quad . \quad . \quad (18a).$$

$\gamma_\nu^{(1)}$ und $\gamma_\nu^{(2)}$ bedeuten darin zwei willkürliche komplexe Konstanten

$$\alpha_\nu^{(\sigma)}=\gamma_\nu^{(\sigma)}+i\,\beta_\nu^{(\sigma)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18b).$$

$J_{1/3}$ und $J_{-1/3}$ sind in (18) bzw. (18a) die bekannten Besselschen Funktionen (Zylinderfunktionen erster Art) und definiert durch die Reihen

$$J_\mu(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{\Pi(\mu+r)\,\Pi(r)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18c),$$

wo Π die bekannte Gaußsche Funktion

$$\Pi(x)=\lim_{\mu\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\mu\cdot\mu^x}{(x+1)(x+2)\ldots(x+\mu)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18d).$$

Für ganzzahliges Argument n ist

$$\Pi(n)=n! \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18e),$$

ferner

$$\Pi(x+n)=(1+x)(2+x)\ldots(n+x)\,\Pi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18f).$$

Tabellen der Π-Funktion finden sich z. B. bei Jahnke-Emde, Funktionstafeln (Teubner, Leipzig 1923). Bei den Funktionen $J_{1/3}$ und $J_{-1/3}$ kommen auf Grund der obigen Rekursionsformel (18f) nur die Werte $\Pi({}^1/_3)$ und $\Pi(-{}^1/_3)$ in Betracht, die wir hier angeben

$$\Pi({}^1/_3)=0{,}893\,,\qquad \Pi(-{}^1/_3)=1{,}354 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18g).$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (10) schreibt sich also in der Form

$$T(x,t) = \sum_{\nu=1}^{n} y^{1/2} \left[\gamma_\nu^{(1)} J_{1/3}\{z(-ik_\nu)^{1/2}\} + \gamma_\nu^{(2)} J_{-1/3}\{z(-ik_\nu)^{1/2}\}\right] e^{i\omega_\nu t} \quad . \quad . \quad (19),$$

wo (19**a**) $y = L(x)$ gesetzt wurde.

Als periodischen Teil in ϑ können wir von dieser komplexen Größe nur den reellen oder auch imaginären Teil gebrauchen,

$$\tau(x,t) = \Re e\,(T(x,t));$$

dieser nimmt die Form an

$$\begin{aligned}\tau(x,t) = \sum_{\nu=1}^{n} \Big[&\cos\omega_\nu t\,\{\alpha_\nu^{(1)} P_\nu^{(1)}(y) + \beta_\nu^{(1)} P_\nu^{(2)}(y) + \alpha_\nu^{(2)} P_\nu^{(3)}(y) + \beta_\nu^{(2)} P_\nu^{(4)}(y)\} \\ &+ \sin\omega_\nu t\,\{\alpha_\nu^{(1)} P_\nu^{\prime(2)}(y) - \beta_\nu^{(1)} P_\nu^{(1)}(y) + \alpha_\nu^{(2)} P_\nu^{(4)}(y) - \beta_\nu^{(2)} P_\nu^{(3)}(y)\}\Big] \quad . \quad (20)\end{aligned}$$

wo die $P_\nu^{(\varkappa)}(y)$ Potenzreihen nach y in einer durch die Lösung (18) vorgegebenen Form sind. Ihre Koeffizienten bestimmt man z. B. mit Hilfe der bekannten Formel für Besselsche Funktionen mit komplexem Argument:

$$i^{-p} J_p(2i\sqrt{\eta}) = \frac{\eta^{p/2}}{\Pi(p)} \left\{1 + \frac{\eta}{1\,(p+1)} + \frac{\eta^2}{1\cdot 2\,(p+1)(p+2)} + \ldots\right\} \quad . \quad . \quad (21).$$

Die Lösung (20) ist noch den Rand- und Anfangsbedingungen anzupassen. Für $x = 0$ (beheizte Wandseite) muß $\tau(x,t)$ in den reellen periodischen Teil von (2) übergehen.

$$\tau(0,t) \cdot \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \cos\omega_\nu t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Daraus folgen durch Koeffizientenvergleichung für die Koeffizienten der ν. Glieder die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&[\alpha_\nu^{(1)} P_\nu^{(1)}(y) + \beta_\nu^{(1)} P_\nu^{(2)}(y) + \alpha_\nu^{(2)} P_\nu^{(3)}(y) + \beta_\nu^{(2)} P_\nu^{(4)}(y)]_{x=0} = C_\nu \\ &[\alpha_\nu^{(1)} P_\nu^{(2)}(y) - \beta_\nu^{(1)} P_\nu^{(1)}(y) + \alpha_\nu^{(2)} P_\nu^{(4)}(y) - \beta_\nu^{(2)} P_\nu^{(3)}(y)]_{x=0} = 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (23).$$

Gemäß der allgemeinen Randbedingung (3) ergibt sich nach unseren Festsetzungen über $l\,(l\,(\vartheta)$ ersetzt durch $l\,(\bar{\vartheta}) = y)$ und da (9) bereits erfüllt wurde

$$\left[y\frac{\partial\tau}{\partial x}\right]_{x=a} = f(\alpha_\nu^{(i)}, \beta_\nu^{(i)}, t, a) - \varphi\,(c_3, Q, a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

wo die Konstanten $\alpha_\nu^{(i)}$ und $\beta_\nu^{(i)}$ in f durch $\tau(x,t)$ bzw. gemäß (4) und anderen Bedingungen für den Bereich $x \geqq a$ eingehen. Die Behandlung der Randbedingung ist genau die gleiche wie bei (22); durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die beiden zur Bestimmung der $\alpha_\nu^{(i)}$ und $\beta_\nu^{(i)}$ noch notwendigen Gleichungen.

Der Wärmefluß wird aus der damit gewonnenen Darstellung des Temperaturverlaufs nach den üblichen Regeln berechnet.

Leider ist die Methode in der obigen Form nicht allgemein praktisch anzuwenden. Die Reihen $P_\nu^{(\varkappa)}$, die an sich absolut konvergieren, konvergieren in vielen Fällen nicht schnell genug, als daß eine zahlenmäßige Rechnung sich in kurzer Zeit durchführen ließe. Nimmt die durch (15a) definierte Größe k_ν größere Werte (z. B. zwischen 10 und 20) an, so konvergieren die Reihen schon nicht mehr besonders gut. Man kommt dadurch mit dem Argument der Besselschen Funktionen in ein Gebiet, in dem die üblichen Darstellungen wegen schlechter Konvergenz versagen, die halbkonvergenten Darstellungen noch nicht anwendbar sind. Dieser Fall tritt bei den Beispielen der Praxis häufig ein. Der Größe k_ν entnimmt man, daß sie klein ist für große Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit und große Schwingungsdauern. Durch diese beiden Eigenschaften sind die Beispiele charakterisiert, die sich mit Vorteil nach der oben gegebenen Methode durchrechnen lassen. Eine ½-stündige Oberschwingung, die Schwarz auf seine Weise annähert[1]), ist mit unserer Methode in ihrer bisherigen Form nicht ohne übergroße Arbeit zu ermitteln.

[1]) l. c. Anm. 2, S. 366.

Über die Schattenkurven des Plückerschen Konoids bei Parallel- und Zentralbeleuchtung.[1]

Von **JOSEF KRAMES** in Wien.

A. Adler[2]) hat wohl als Erster den Satz bewiesen, daß der Schlagschatten eines Plückerschen Konoids für Parallelbeleuchtung auf jede zu seiner Doppelgeraden (Achse) senkrechte Ebene eine dreispitzige Hypozykloide ist. Er zeigte zu diesem Zweck, daß diese Schattenkurve sowohl der von Cremona[3]) als auch der von Steiner[4]) herrührenden Definition der dreispitzigen Hypozykloide genügt. O. Danzer[5]) hat diesen beiden Beweisen einen dritten hinzugefügt, der der Schröterschen Definition[6]) der genannten Kurve entspricht. Es fehlte aber bisher eine Ableitung des genannten Satzes, bei der die fragliche Schattenkurve unmittelbar als Hypozykloide im Sinne der Definition als Rollkurve erkannt wird. Eine solche Ableitung wird in Nr. 2 der vorliegenden Arbeit geliefert, und zwar mit Hilfe von vorwiegend räumlichen Ueberlegungen. In Nr. 1 werden vorerst einige, zum Teil bereits bekannte Eigenschaften des Plückerschen Konoids auf kurzem Weg abgeleitet. Die Punkte und Tangentialebenen des Konoids werden hierbei vorteilhafterweise auf die Strahlen eines speziellen hyperbolischen Netzes abgebildet. Diese Abbildung wird in Nr. 3 in projektivem Sinn verallgemeinert und zur Untersuchung der bei beliebiger Zentralbeleuchtung an der Fläche auftretenden Schattenkurven verwertet. Es ergeben sich dadurch einige neue Sätze über das Plückersche Konoid, insbesondere über die ihm umschriebenen Kegel, sowie eine (vielleicht beachtenswerte) Abbildung der ∞^3 Punkte des Raums auf die in der Bildebene liegenden und durch einen festen Punkt gehenden Kegelschnitte mit parallelen Achsen. Schließlich werden auch die verschiedenen Sonderfälle untersucht, die bei Zentralbeleuchtung des Plückerschen Konoids möglich sind.

1. Das Plückersche Konoid ist bekanntlich eine solche Regelfläche dritten Grades, deren einfache Leitlinie L_u im Unendlichen liegt und deren unendlichferne Erzeugenden M_1 und M_2 den absoluten Kegelschnitt in dessen Schnittpunkten mit L_u berühren[7]). Im folgenden soll jede solche Fläche mit Γ bezeichnet werden. Wird als Grundrißebene Π_1 eine durch L_u gehende, also zur Richtebene des Konoids parallele Ebene gewählt, so ist die Achse (Doppelgerade) A von Γ senkrecht zu Π_1 und A' ein Punkt. Die Schnittpunkte von A mit den Torsallinien T_1 und T_2 von Γ sind die Kuspidalpunkte k_1 und k_2 der Fläche; ihre Entfernung heißt die Höhe $\mathfrak{h}$ des Konoids. Die Grundrisse von T_1 und T_2 gehen durch A' und stehen aufeinander senkrecht (siehe Abb. 1).

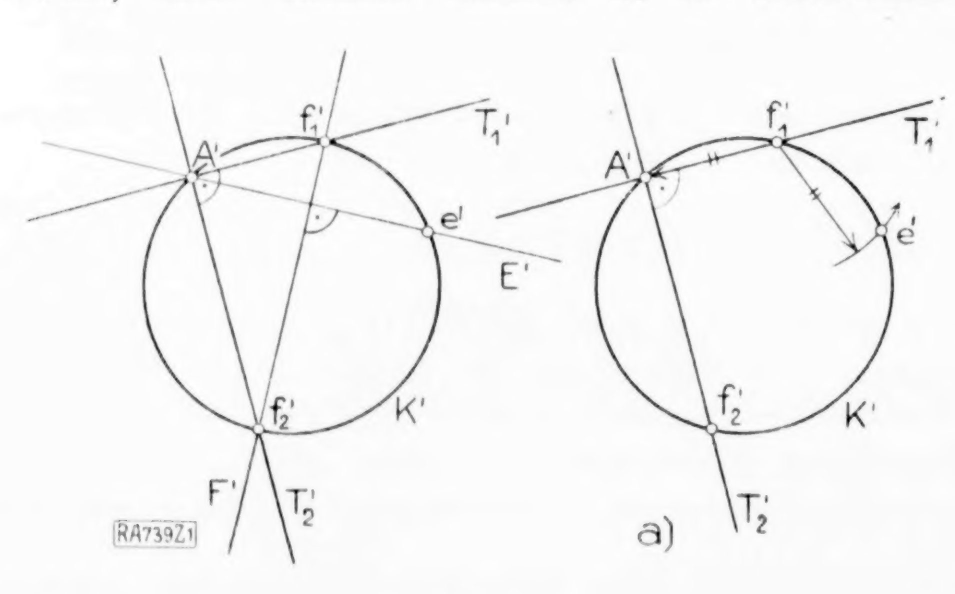


Abb. 1.

Eine der wichtigsten Grundeigenschaften der Fläche ist die folgende:

---

[1]) Nr. 1 und 2 der vorliegenden Arbeit bilden im Wesentlichen einen Ausschnitt aus der vom Verfasser im Studienjahr 1924/25 an der Technischen Hochschule in Wien abgehaltenen Vorlesung über »Konstruktive Behandlung der Regelflächen«. — Das Plückersche Konoid wird des öftern auch als (Cagleysches) Zylindroid bezeichnet.

[2]) Zur Theorie des Plückerschen Konoids, Sitz.-Ber. d. Wiener Akademie d. Wissenschaften, Bd. 113, IIa (1904), S. 431 bis 437.

[3]) Sur l'hypercycloide à trois rebroussements, Crelle J. 64, S. 101 ff.

[4]) Ueber eine bemerkenswerte Kurve dritter Klasse (vierter Ordnung), Crelle J. 53, S. 231.

[5]) Schattenkonstruktionen für das Plückersche Konoid, Sitz.-Ber. d. Wiener Akademie d. Wissenschaften, Bd. 123, IIa (1914), S. 2049 bis 2064.

[6]) Ueber die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde, Crelle J. 54, S. 31.

[7]) Vergl. z. B. A. Adler, a. a. O., S. 432.

Jede Tangentialebene ε von Γ schneidet Γ — abgesehen von der in ε befindlichen Erzeugenden — nach einer Ellipse K, deren Grundriß (im oben erklärten Sinn) ein durch A' gehender **Kreis** ist. Es ist aber auch umgekehrt jeder in Π_1 liegende Kreis K', der durch A' geht, der Grundriß einer auf Γ befindlichen Ellipse K, die naturgemäß einer Tangentialebene von Γ angehört. Die Tangentialebenen von Γ sind dadurch eineindeutig auf die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ der in Π_1 liegenden und durch A' gehenden Kreise K' abgebildet. Viele der bekannten Eigenschaften des Plückerschen Konoids können daher einheitlich in der Weise abgeleitet werden, daß man aus $\mathfrak{K}$ passend gewählte stetige Reihen von ∞^1 Kreisen K' herausgreift und die zugehörigen Tangentialebenen sowie deren Berührungspunkte untersucht[1]).

Zur praktischen Durchführung dieses Gedankens benötigt man vor allem eine einfache Grundkonstruktion, die es ermöglicht, zu jedem K' von $\mathfrak{K}$ rasch den Berührungspunkt der entsprechenden Tangentialebene zu finden (und umgekehrt). Eine solche Konstruktion ergibt sich daraus, daß jede auf Γ liegende Ellipse K die horizontalen Torsalebenen τ_1 und τ_2 von Γ in jenen Punkten f_1 und f_2 berührt, in welchen die Ebene ε von K von T_1 und T_2 getroffen wird. Da ferner im Grundriß die Gerade[2]) $F' = [f'_1 f'_2]$ die Mitte von K' enthält, sind f_1 und f_2 (im Raum) bereits die Hauptscheitel von K. Weiters liegt der Berührungspunkt e von ε auf der in ε befindlichen Erzeugenden E von Γ, das ist jene Hauptlinie von ε, die A schneidet. Ihr Grundriß ist $E' = [A|F]$ und dessen zweiter Schnittpunkt mit K' ist der Grundriß e' von e. e' wird demnach bei gegebenem K' am einfachsten in folgender Weise erhalten:

Man setze den Zirkel in f_1' (oder f_2') ein und schneide die Entfernung $\overline{f_1'A}$ (bzw. $\overline{f_2'A'}$) auf K' ab (siehe Abb. 1a) (Grundkonstruktion)[3]). Ist umgekehrt e' gegeben und K' zu suchen, so zeichne man die Symmetrale F' von A' und e'; die Schnittpunkte f_1' und f_2' von F' mit T_1' bzw. T_2' sind dann bereits Gegenpunkte von K'.

Aus Obigem ergibt sich, daß die Hauptachsen aller auf Γ befindlichen Ellipsen in Geraden liegen, die dem hyperbolischen Netz $\mathfrak{N}$ angehören, dessen Brennlinien T_1 und T_2 sind. Es ist aber auch jeder Strahl F dieses Netzes Fallinie einer Tangentialebene ε von Γ, wobei die Schnittellipse von ε mit Γ die Schnittpunkte f_1 und f_2 von F mit T_1 bzw. T_2 zu Hauptscheiteln hat. Somit sind die Tangentialebenen von Γ (und deren Berührungspunkte) auch auf die Strahlen des Netzes $\mathfrak{N}$ eineindeutig abgebildet. Eine Ausnahme bilden nur die Torsalebenen τ_1 und τ_2 von Γ, denen je ∞^1 Strahlen von $\mathfrak{N}$ zugeordnet sind und der uneigentliche Strahl von $\mathfrak{N}$, dem alle asymptotischen Ebenen von Γ entsprechen.

Ist $\mathfrak{R}$ eine beliebige, in $\mathfrak{K}$ enthaltene stetige Kreisreihe, so bilden die zugehörigen Tangentialebenen eine Γ berührende Torse $\mathfrak{T}$. Dieser entspricht in obiger Abbildung eine in $\mathfrak{N}$ enthaltene Regelfläche Φ und man erhält den Grundriß der Berührungskurve von Γ mit $\mathfrak{T}$, wenn man den Punkt A' an den Grundrissen der Erzeugenden von Φ spiegelt. Hieraus folgt der

Satz 1: *Ist $\mathfrak{T}$ eine beliebige, einem Plückerschen Konoid umschriebene Torse und bezeichnet U' den ersten scheinbaren Umriß jener Regelfläche, deren Erzeugenden den Ebenen von $\mathfrak{T}$ angehören und die beiden Torsallinien von Γ schneiden, so ist der Grundriß der Berührungskurve von Γ und $\mathfrak{T}$ zentrisch-ähnlich zur Fußpunktenkurve von U' in bezug auf den Grundriß der Achse von Γ als Pol. Letzterer ist zugleich das Aehnlichkeitszentrum und das Aehnlichkeitsverhältnis ist 2 : 1.*

Obige Grundkonstruktion soll sogleich bei der Ermittlung der Eigenschattengrenze des Plückerschen Konoids für Parallelbeleuchtung zur Anwendung kommen. Zu diesem Zweck suchen wir in $\mathfrak{K}$ jene Reihe von Kreisen K', deren zugehörige Tangentialebenen zur gegebenen Lichtrichtung L parallel sind. Es ist hierbei von Vorteil, die Grundrißebene Π_1 in die Symmetrieebene μ der beiden Torsalebenen τ_1 und τ_2 verlegt zu denken. μ enthält alle Mitten der auf Γ befindlichen Ellipsen sowie jene beiden (zueinander senkrechten) Erzeugenden, die sich im Grundriß in die Winkelhalbierenden von T'_1 und T'_2

---

[1]) In der erwähnten Vorlesung hat dies der Verfasser ausführlicher dargelegt.

[2]) Wegen der in vorliegender Arbeit angewandten Bezeichnungsweise siehe E. Müller, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen, I. Bd., 3. Aufl. (1920), S. 9.

[3]) Vergl. Rohn-Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 3. Aufl., III. Bd. (1906), S. 235 f.

projizieren[1]). Die Normalrisse der Raumgebilde auf μ sollen in der Folge mit einem »m« bezeichnet werden. Des Weiteren wollen wir annehmen, daß die Torsalebene τ_1 von Γ oberhalb μ liege, so daß ihr Abstand von μ gleich $+\mathfrak{h}/2$, jener der Torsalebene τ_2 gleich $-\mathfrak{h}/2$ sei. Die Richtung der Lichtstrahlen ist festgelegt, sobald von einem Lichtstrahl L die Grundrisse seiner Schnittpunkte l_1 und l mit τ_1 bzw. μ gegeben sind (siehe Abb. 2).

Wir beweisen nun folgenden Satz: Es gibt auf einem Plückerschen Konoid für jede gegebene (nicht zu μ parallele) Lichtrichtung immer eine und nur eine Ellipse O, deren Schlagschatten O_s auf μ mit dem Normalriß O^m auf μ zusammenfällt[2]). Zum Beweis verschieben wir die Strecke $l_1{}^m l^m$ parallel zu sich selbst derart, daß $l_1{}^m$ auf $T_1{}^m$ und zugleich l^m auf $T_2{}^m$ fällt. Dies ist bei Beachtung des Sinnes von L^m nur auf eine einzige Weise möglich. Die neuen Lagen der Punkte $l_1{}^m$ und l^m seien mit $o_1{}^m$ bzw. $o_2{}^m$ bezeichnet. Betrachten wir diese Punkte als Gegenpunkte eines Kreises O^m, so erkennt man in der Tat, daß O^m der Grundriß einer Ellipse O von Γ ist, deren Schatten O_s auf μ (für die Lichtrichtung L) mit O^m identisch ist. Es fällt nämlich der Schatten o_{1s} von o_1 in $o_2{}^m$, desgleichen ist $o_{2s} \equiv o_1{}^m$ und O_s enthält auch die in μ liegenden Nebenscheitel von O. Ebenso leicht läßt sich zeigen, daß es für jede auf einem Plückerschen Konoid liegende Ellipse K stets eine (und nur eine) solche Richtung der Lichtstrahlen gibt, daß der Schlagschatten von K auf μ mit dem Normalriß von K auf μ zusammenfällt.

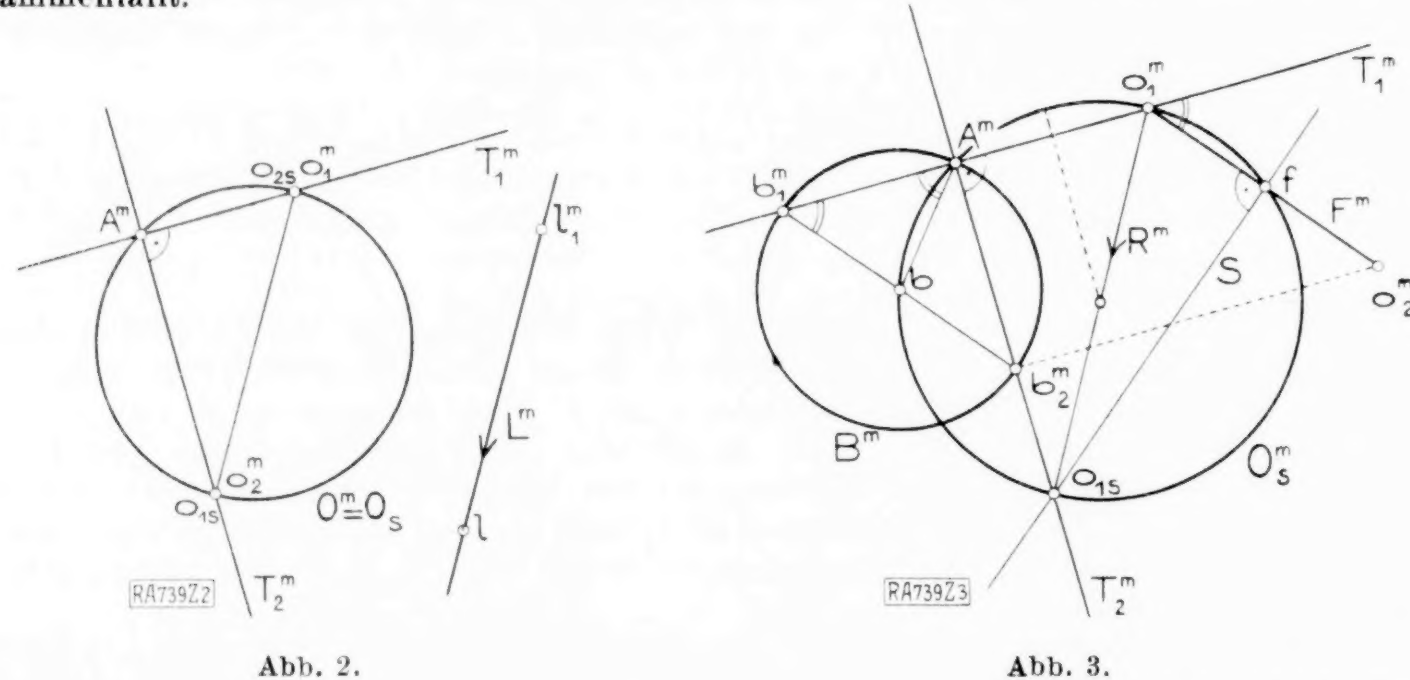


Abb. 2. Abb. 3.

Nach diesen Vorbereitungen sollen nun die ∞^1 zu L parallelen Tangentialebenen von Γ ermittelt werden. Zu diesem Zweck seien $T_1{}^m$, $T_2{}^m$ und $O^m = O_s = O_s{}^m$ als gegeben vorausgesetzt (siehe Abb. 3). Die Richtung der Lichstrahlen ist sodann durch die Verbindungsgerade R der Punkte o_1 auf T_1 und o_{1s} in μ festgelegt. Eine beliebige durch R gelegte Ebene ϱ schneidet μ in einer durch o_{1s} gehenden Geraden S; die durch o_1 gelegte Fallinie F (Lot auf S) von ϱ enthält daher den Schnittpunkt f von S mit $O_s{}^m$. Macht man auf F^m

$$\overrightarrow{f\,o_2{}^m} = \overrightarrow{o_1{}^m f},$$

so ist $o_2{}^m$ der Grundriß des Schnittpunktes von F mit der Torsalebene τ_2 von Γ. Um nun die zu ϱ parallele Tangentialebene β von Γ zu finden, üben wir auf $F^m = [o_1{}^m o_2{}^m]$ eine solche Schiebung aus, daß hierbei $o_1{}^m$ auf $T_1{}^m$ bleibt und $o_2{}^m$ auf $T_2{}^m$ zu liegen kommt. Bezeichnen wir die neuen Lagen von $o_1{}^m$ und $o_2{}^m$ mit $b_1{}^m$ bzw. $b_2{}^m$, so sind b_1 und b_2 im Raum die Hauptscheitel einer auf Γ liegenden Ellipse B, deren Ebene $\parallel R$ ist. Man erkennt nun leicht, daß der in μ liegende Mittelpunkt b von B auf den Kreis $O_s{}^m$ fällt. Die Punkte $b_1{}^m$, b und A^m bilden nämlich ein gleichschenkliges Dreieck, so daß die Punkte b und f bezüglich des zu T_2 parallelen Durchmessers von $O_s{}^m$ geradsymmetrisch sind. Da obige Konstruktion von B aus der durch R gelegten Ebene ϱ umkehrbar eindeutig ist, gilt der

[1]) Siehe Rohn-Papperitz, a. a. O.

[2]) O. Danzer zeigte bereits, daß es stets eine auf Γ befindliche Ellipse gibt, deren Schlagschatten auf jede, zur Richtebene parallele Ebene ein Kreis ist. Siehe a. a. O., S. 2053 f.

Satz 2: *Die Mitten der auf einem Plückerschen Konoid liegenden Ellipsen, deren Ebenen zu einer gegebenen Richtung R parallel sind, erfüllen den Normalriß O^m jener Ellipse O von Γ, deren Schlagschatten auf μ für die Lichtrichtung R mit O^m zusammenfällt*[1]),

sowie dessen Umkehrung:

Satz 2a: *Greift man aus der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ eine solche Reihe von Kreisen K' heraus, deren Mitten auf einem festen Kreis O_s^m von $\mathfrak{K}$ liegen, so sind die zu diesen Kreisen gehörigen Tangentialebenen von Γ zu einer festen Richtung parallel.*

Ist somit für eine gegebene Lichtrichtung der Kreis O_s^m gefunden, so kann der Grundriß G^m der Eigenschattengrenze G von Γ mit Hilfe der früher erwähnten Grundkonstruktion punktweise (mit dem Zirkel allein) rasch ermittelt werden (siehe Abb. 4). G^m ist eine (rationale) zirkulare Kurve vierter Ordnung mit einem dreifachen Punkt in A^m. Ist die Lichtrichtung insbesondere zu einer der Ebenen $\alpha_1 = [A\,T_1]$ und $\alpha_2 = [A\,T_2]$ parallel, so ist G^m bezüglich T_1^m (bzw. T_2^m) symmetrisch, und zwar ein sogenanntes gerades Zweiblatt[2]).

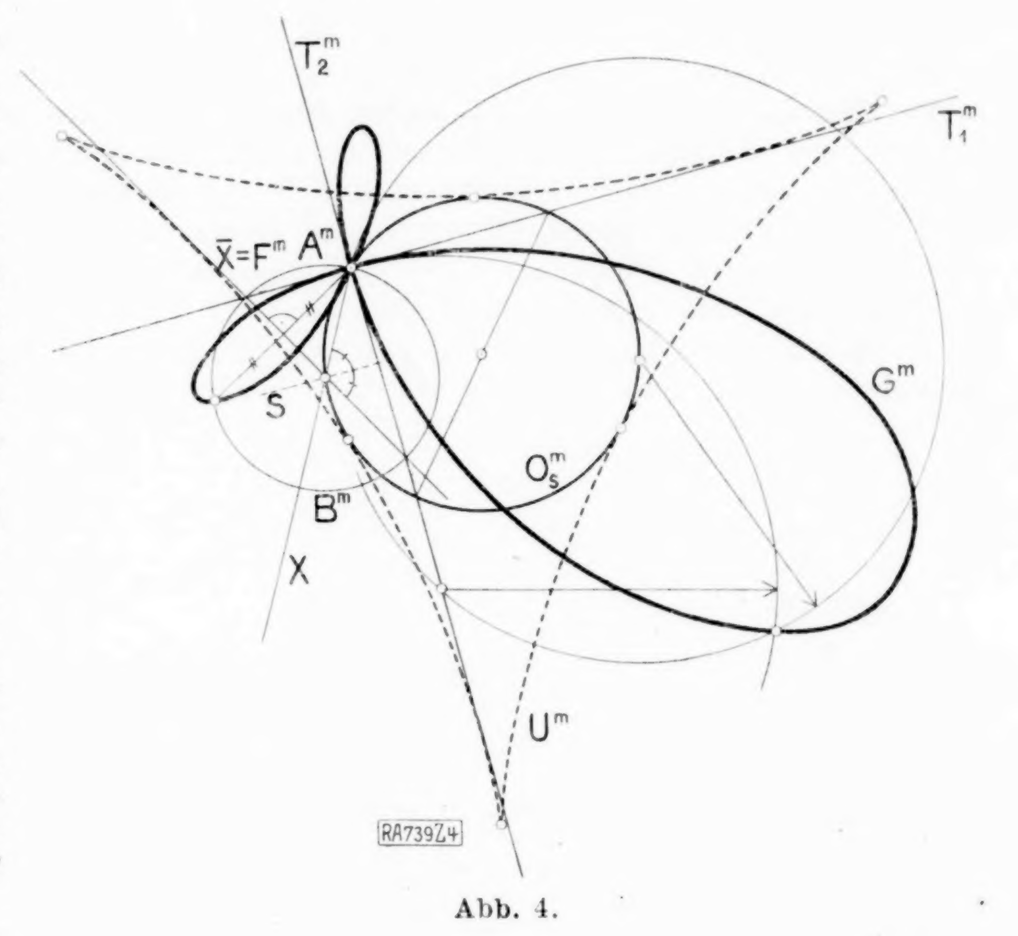


Abb. 4.

Aus Satz 2 folgt nun auch, daß die Strahlen des Netzes $\mathfrak{N}$, die im Sinne der früher erwähnten Abbildung den zu R parallelen Tangentialebenen von Γ entsprechen, eine in $\mathfrak{N}$ enthaltene Regelfläche vierten Grades Φ bilden. Diese Fläche ist durch die Geraden T_1 und T_2 und den Kreis O_s^m als Leitlinien eindeutig bestimmt; Φ ist demnach vom Typus VII der Sturmschen Einteilung der Regelflächen vierten Grades[3]); ihre isolierte Doppelerzeugende fällt in die unendlichferne Leitgerade L_u von Γ. Da ferner Φ die Achse von Γ enthält, ist der erste scheinbare Umriß U^m von Φ eine Kurve dritter Klasse durch A^m. Es läßt sich zeigen, daß U^m eine dreispitzige Hypozykloide ist. Für letztere gilt nämlich der Satz von Schröter[4]):

Gegeben sei ein Kreis K und eine feste Richtung T; ist X eine durch einen festen Punkt von K gehende Gerade, bezeichnet ferner S die durch den zweiten Schnittpunkt von X mit K gelegte Parallele zu T, so ist die zu X bezüglich S symmetrische Gerade $\bar{X}$ stets Tangente einer dreispitzigen Hypozykloide; für letztere ist K der dreifach berührende Kreis. Daß diese Erzeugungsweise für U^m zutrifft, folgt sowohl aus Abb. 3 als auch aus Abb. 4, wo U^m eingezeichnet ist. An die Stelle von K bzw. T treten hierbei O_s^m bzw. T_2^m (oder T_1^m) und der feste Punkt auf O_s^m ist A^m. Mit Rücksicht auf Satz 1 ergibt sich somit: **Der Grundriß der Eigenschattengrenze eines Plückerschen Konoids für Parallelbeleuchtung ist stets Fußpunktenkurve einer dreispitzigen Hypozykloide**[5]).

Zu Abb. 4 sei noch bemerkt, daß U^m die Grundrisse der vier Kuspidalpunkte von Φ enthält, die zu je zweien auf T_1^m bzw. T_2^m liegen. Letztere Gerade sind überdies

[1]) Vergl. hierzu O. Danzer, a. a. O., S. 2057 f. Es wird dort auch der Zusammenhang von O_s^m mit dem der Lichtquelle zugeordneten Polarhyperboloid von Γ angegeben.

[2]) Siehe z. B. Danzer, a. a. O., S. 2060.

[3]) Siehe R. Sturm, Liniengeometrie I, Leipzig 1892, S. 57 ff.

[4]) Siehe Schröter, a. a. O.

[5]) Dieses Ergebnis erhält auch Danzer, a. a. O. jedoch mittels rein planimetrischer Ueberlegung.

Tangenten von U^m. Mittels der **Schröterschen** Erzeugung könnten auch sofort die Spitzen von U^m gefunden werden.

2. Ableitung des Adlerschen Satzes. Um nunmehr den eingangs genannten Satz von Adler abzuleiten, untersuchen wir den Schlagschatten G_s von Γ auf μ. Der Schlagschatten von Γ auf jede zu μ parallele Ebene sowie auf alle Ebenen, die aus μ durch Spiegelung an einer zur Lichtrichtung L senkrechten Ebene hervorgehen, ist eine zu G_s kongruente Kurve. G_s wird erhalten, wenn man dem Konoid den zu L parallelen Zylinder ζ umschreibt und dessen Schnittkurve mit μ ermittelt. Nun ist bekanntlich die Eigenschattengrenze G von Γ i. a. eine Raumkurve vierter Ordnung zweiter Art[1]) und der Zylinder ζ ist gleichfalls von vierter Ordnung. Γ und ζ haben daher neben G noch eine Kurve vierter Ordnung (zweiter Art) C gemeinsam. Letztere ist zugleich jene Schlagschattenkurve, die die Fläche auf sich selbst wirft. Da ζ von allen zu L parallelen Tangentialebenen von Γ umhüllt wird, ist C auch die Hüllkurve der Schnittellipsen dieser Tangentialebenen mit Γ. Somit ist der Grundriß C^m von C wegen Satz 2 — als Hüllkurve aller Kreise von $\mathfrak{K}$, deren Mitten einem Kreis durch A^m angehören — eine Kardioide[2]) mit der Spitze in A^m (siehe Abb. 5). Der Schlagschatten von C auf μ ist aber mit dem gesuchten Schlagschatten von Γ identisch.

Zur näheren Untersuchung von $G_s = C_s$ zeichnen wir nun (Abb. 6) den zur gegebenen Lichtrichtung L gehörigen Kreis O_s^m sowie den Grundriß B^m eines zu L parallelen

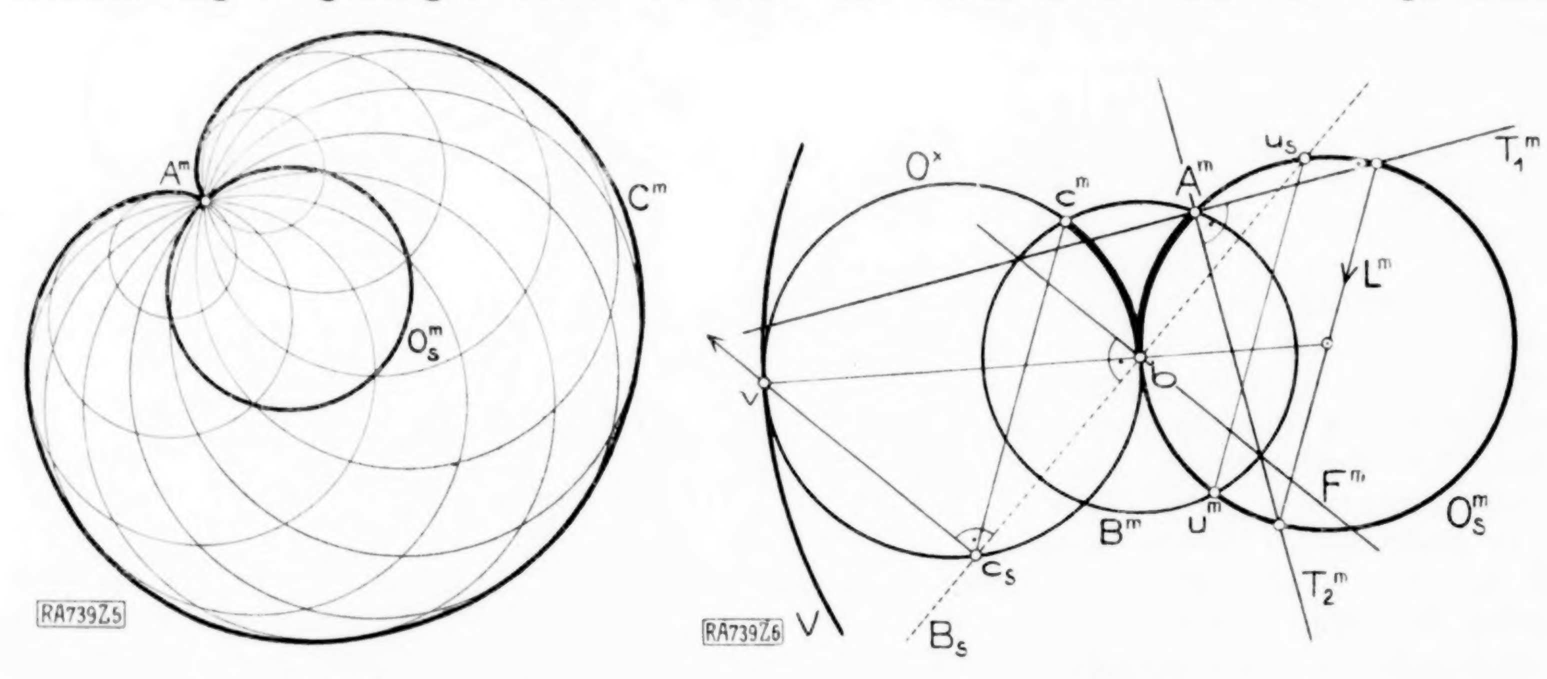


Abb. 5. Abb. 6.

Tangentialschnittes von Γ; die Mitte b von B ist hierbei nach Satz 2 auf O_s^m (beliebig) zu wählen. Ferner zeichnen wir den zu O_s^m bezüglich b zentrisch-symmetrischen Kreis $O^\times$. Da die Kardioide auch durch Rollung von $O^\times$ auf O_s^m erzeugt werden kann, ist einer der Schnittpunkte von $O^\times$ mit B^m der Berührungspunkt c^m von B^m mit C^m. Des Weitern haben die auf Γ liegenden Ellipsen O und B, deren Normalrisse auf μ die Kreise O_s^m bzw. B^m sind, im Raum einen Punkt u gemeinsam[3]), dessen Normalriß u^m als zweiter Schnittpunkt von O_s^m und B^m unmittelbar gegeben ist. u^m und c^m sind, wie aus Abb. 6 zu ersehen ist, Gegenpunkte von B^m. Da u auf O liegt, fällt sein Schatten auf μ in jenen Punkt u_s von O_s^m, der zugleich auf der durch u^m parallel zu L^m gelegten Geraden liegt. Der Schlagschatten der zu L parallelen Ebene β von B fällt demnach in die Verbindungsgerade B_s von u_s mit b. Auf dieser Geraden liegt daher auch der Schatten c_s von c. c_s ist der Schnittpunkt von B_s mit der durch c^m gelegten Parallelen zu L^m, also jener Punkt von $O^\times$, der zu u_s bezüglich b zentrisch-symmetrisch ist. Hierbei ist B_s bereits die Tangente von C_s in c_s. Es enthält daher die Kurvennormale von C_s in c_s den auf $O^\times$ liegenden Gegenpunkt v von b. Letztres gilt immer, wie auch die Mitte b von B^m ursprünglich gewählt wurde. Läßt man b den Kreis O_s^m durchlaufen, so beschreibt v den

[1]) Siehe z. B. E. Weyr, Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung, Leipzig 1870, S. 98.

[2]) C^m ist auch die Fußpunktenkurve eines zu O_s^m zentrisch-ähnlichen und doppelt so großen Kreises für A^m als Pol.

[3]) Siehe z. B. E. Weyr, a. a. O., S. 31.

dreimal so großen und mit O_s^m konzentrischen Kreis V. Wir erkennen daher, daß C_s auch als Bahnkurve des auf $O^\times$ befindlichen Punktes c_s entsteht, sobald $O^\times$ im Kreis V (ohne Gleiten) rollt.

C_s ist also in der Tat eine als Rollkurve erzeugte dreispitzige Hypozykloide.

Man erkennt jetzt auch, daß O_s^m bereits jener Kreis ist, der C_s in drei Punkten x_1, x_2, x_3 berührt. x_1, x_2, x_3 fallen nach Obigem in jene Punkte von O_s^m, in welchen O_s^m von einer Geraden B_s berührt wird. Man erhält sie daher — wie man leicht nachweisen könnte — auf folgende Weise (Abb. 7): Bezeichnet λ den Winkel zwischen T_2^m und L^m, so ziehe man durch A^m drei Gerade X_1, X_2, X_3 die mit T_2^m bzw. die Winkel $\frac{\lambda}{3}$, $\frac{\lambda+\pi}{3}$ und $\frac{\lambda+2\pi}{3}$ einschließen. Die Schnittpunkte von X_1, X_2, X_3 mit O_s^m sind dann die gesuchten Punkte. Aus x_1, x_2, x_3 ergeben sich auch sofort die Spitzen von C_s[1]).

Die bisherigen Betrachtungen liefern noch einen weiteren Beweis des Adlerschen Satzes. Es läßt sich nämlich zeigen, daß die Kurve $C_s = G_s$ aus dem ersten scheinbaren Umriß der früher betrachteten Regelfläche Φ durch Spiegelung am Mittelpunkt von O_s^m hervorgeht. Da nämlich die Erzeugenden F von Φ in den zu L parallelen Tangentialebenen von Γ liegen, fallen die Schlagschatten der F auf μ in die Geraden B_s. Der Schlagschatten von Φ auf μ ist daher mit dem Schatten C_s von Γ identisch[2]). Nun ist jede Erzeugende F von Φ als Fallinie der zugehörigen Tangentialebene von Γ zu ihrem Schlagschatten B_s senkrecht und es schneiden sich F^m und B_s in dem auf O_s^m liegenden Punkt b. Hieraus folgt aber auf Grund der Schröterschen Definition der Hypozykloide obige Behauptung.

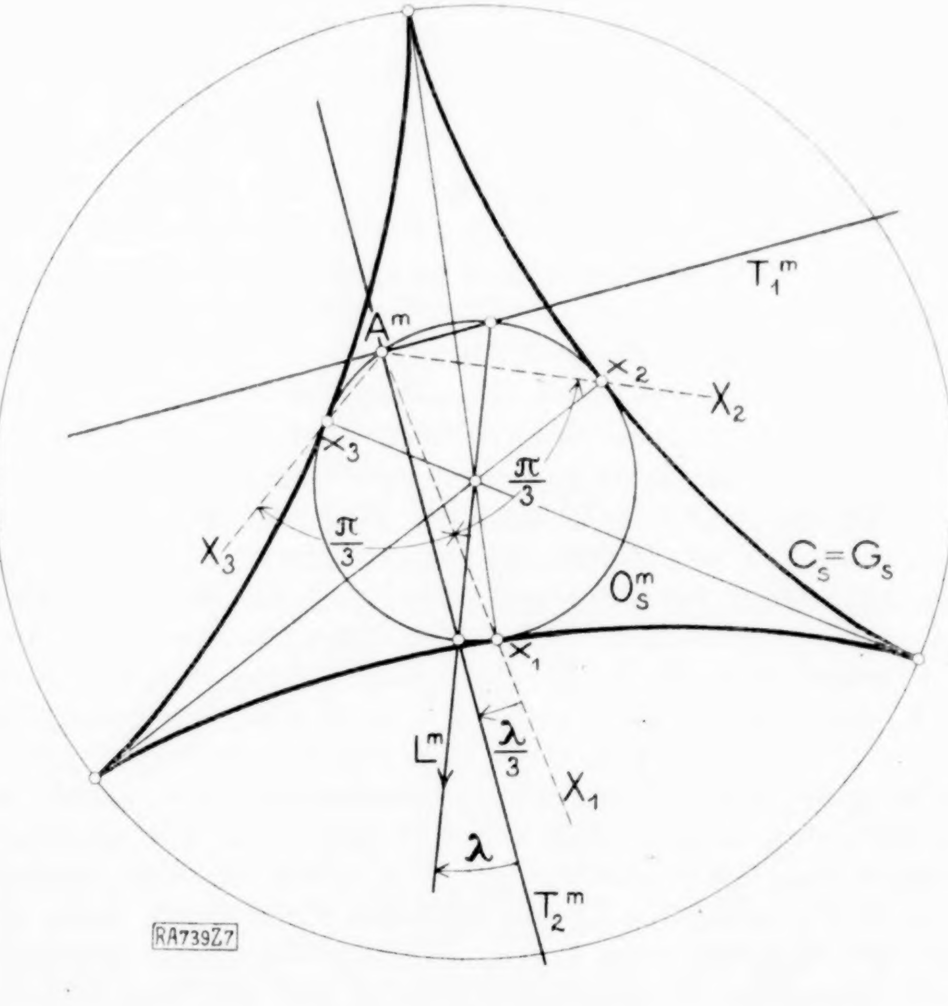


Abb. 7.

3. Projektive Verallgemeinerung. Die in **1** entwickelten Grundgedanken ermöglichen auch eine nähere Untersuchung der bei beliebiger Zentralbeleuchtung am Plückerschen Konoid auftretenden Schattenkurven. Ist p der (im Endlichen liegende) Lichtpunkt, so suchen wir (analog wie in **1**) jene ∞^1, in der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ enthaltenen Kreise B^m, deren zugehörige Tangentialebenen durch p gehen. Hierzu stellen wir vorerst folgende allgemeinere Betrachtungen an.

Gegeben sei eine beliebige Regelfläche dritten Grades Δ mit reellen getrennten Torsallinien T_1 und T_2. Bezeichnet man das hyperbolische Netz, dessen Brennlinien T_1 und T_2 sind, mit $\mathfrak{N}$ und ordnet man jeder Tangentialebene von Δ den in ihr liegenden Strahl von $\mathfrak{N}$ zu, so erkennt man (wie in **1**), daß die Tangentialebenen von Γ eineindeutig auf die Strahlen von $\mathfrak{N}$ abgebildet sind. Ausnahmen bilden hierbei bloß: Die einfache Leitlinie L von Δ, die allen ∞^1 Tangentialebenen von Δ in den Punkten

[1]) Wegen direkter Konstruktion der Spitzen von $C_s = G_s$ siehe Rohn-Papperitz, a. a. O., S. 240.

[2]) Der Schlagschatten von Φ auf μ ist auch für alle zu den Erzeugenden von Φ parallelen Lichtrichtungen eine dreispitzige Hypozykloide. Vergl. **3** dieser Arbeit, wo über die Doppelerzeugende von Φ näheres ausgeführt wird.

von L zugeordnet ist, und die **Torsalebenen** $\tau_1 = [L\,T_1]$ und $\tau_2 = [L\,T_2]$ von Δ; letzteren entsprechen alle Strahlen der in τ_1 bzw. τ_2 liegenden Strahlbüschel, deren Scheitel jeweils der Schnittpunkt der anderen Torsallinie mit L (also der Punkt $t_2 = [L\,T_2]$ bzw. $t_1 = [L\,T_1]$) ist (s. Abb. 8).

Abb. 8.

Wir untersuchen nun jene in $\mathfrak{N}$ enthaltene Regelfläche Ψ, deren Erzeugenden den durch einen gegebenen Punkt p des Raumes gehenden Tangentialebenen von Δ entsprechen. Ist X eine durch p gehende und T_1 im Punkt x_1 schneidende Gerade, so gehen durch X drei Tangentialebenen von Δ, nämlich die Ebene $\varphi = [X\,T_1]$, die Δ im Kuspidalpunkt k_1 berührt, und noch zwei andre Ebenen ξ und η. φ enthält den durch p gehenden Strahl P von $\mathfrak{N}$, der also Ψ angehört, und in ξ und η befindet sich je eine durch x_1 gehende Erzeugende von Ψ; die letzteren beiden Erzeugenden sind durch die Schnittpunkte von ξ bzw. η mit T_2 bestimmt. Das Gleiche tritt immer ein, wie auch x_1 auf T_1 oder T_2 gewählt werden mag. Ψ ist daher das Erzeugnis einer zwischen den Punkten von T_1 und T_2 bestehenden (2,2)-**Korrespondenz**, also eine Regelfläche vierten Grades, für die T_1 und T_2 **doppelte Leitgerade** sind.

Man beachte ferner, daß jede durch die einfache Leitlinie L von Δ gelegte Ebene zwei Erzeugende von Δ enthält, also eine Doppeltangentialebene dieser Fläche ist. Die auf L befindlichen Berührungspunkte dieser Ebenen bilden hierbei eine Involution mit den Doppelpunkten in t_1 und t_2. Da auch die Verbindungsebene λ von p mit L eine solche Ebene ist, ergibt sich, daß L eine **Doppelerzeugende** von Ψ ist. Ψ ist daher rational und zwar (wie Φ in **1**) eine Regelfläche vierten Grades siebenter Art. Man erkennt auch, daß die Doppelgerade A von Δ eine (einfache) Erzeugende von Ψ ist.

Die Berührungspunkte der durch eine Doppelerzeugende D einer (beliebigen) Regelfläche gelegten Ebenen bilden bekanntlich zwei auf D befindliche projektive Punktreihen. Es wird sich zeigen, daß diese Projektivität auf der Doppelerzeugenden L von Ψ insbesondere eine **Involution** ist. Vor allem ist klar, daß die Berührungspunkte der Ebenen $\tau_1 = [L\,T_1]$ und $\tau_2 = [L\,T_2]$ bei den Punkten t_1 bzw. t_2 zusammenfallen. t_1 und t_2 sind also die Doppelpunkte dieser Projektivität. Wir bezeichnen ferner die in der Ebene $\lambda = [p\,L]$ liegenden Erzeugenden von Δ mit M_1 und M_2; ihre Schnittpunkte mit L seien m_1 bzw. m_2 (Abb. 8). Da die Regelflächen Δ und Ψ den Berührungskegel $\varkappa$ mit dem Scheitel p gemeinsam haben, liegen die beiden Berührungspunkte einer Tangentialebene β von $\varkappa$ mit Δ und Ψ auf einer Geraden durch p. Läßt man β in die Ebene $\lambda = [p\,L]$ rücken, so erkennt man, daß auch Ψ von λ in den Punkten m_1 und m_2 berührt wird. m_1 und m_2 sind aber nach einer früheren Bemerkung bezüglich t_1 und t_2 harmonisch, also liegen alle Punktepaare, in welchen die durch L gelegten Ebenen Ψ berühren, zu t_1 und t_2 harmonisch und damit ist obige Behauptung erwiesen. Desgleichen ergibt sich jetzt, daß die Tangentialebenenpaare von Ψ in den Punkten von L eine **Ebeneninvolution** mit den Doppelebenen τ_1 und τ_2 bilden. Je zwei bezüglich τ_1 und τ_2 harmonische Ebenen berühren demnach Ψ in denselben, zu t_1 und t_2 harmonischen Punkten. Jede Doppelerzeugende von dieser Art soll eine **harmonische Doppelerzeugende** heißen. Eine Regelfläche mit einer solchen ist in der Umgebung derselben projektiv-äquivalent mit zwei Regelflächen, die sich längs einer gemeinsamen Erzeugenden unter rechtem Winkel durchschneiden. Da jede durch die Doppelerzeugende einer Regelfläche vierten Grades siebenter Art gelegte Ebene dieselbe nach einem Kegelschnitt schneidet, enthalten je zwei durch L gelegte und zu τ_1 und τ_2 harmonische Ebenen immer zwei Kegelschnitte von Ψ, die einander in zwei auf L befindlichen Punkten treffen. Obige Ueberlegungen liefern den

Satz 3: *Legt man durch einen beliebigen Punkt p des Raumes die eine Regelfläche dritten Grades Δ mit reellen getrennten Torsallinien T_1 und T_2 berührenden Ebenen β, so bilden die in β befindlichen und T_1 und T_2 schneidenden Geraden eine*

Regelfläche vierten Grades siebenter Art Ψ, für die die einfache Leitlinie L von Δ eine harmonische Doppelerzeugende ist; Ψ enthält auch die durch p gehende Transversale P von T_1 und T_2 sowie die Doppelgerade von Δ.

Da jede Regelfläche dritten Grades mit reellen getrennten Torsallinien durch eine reelle Kollineation in ein Plückersches Konoid übergeführt werden kann[1]), so gilt dieser Satz insbesondre auch für jedes solche Konoid. Satz 3 ist zugleich eine projektive Verallgemeinerung des Ergebnisses auf S. 373, 4. Absatz; er enthält aber auch den Satz 2 (**1**) als Sonderfall.

Soll nämlich der Eigenschatten eines Plückerschen Konoids für parallele Lichtstrahlen ermittelt werden, so hat man Δ durch Γ zu ersetzen und den Lichtpunkt p im Unendlichen anzunehmen. An die Stelle der zu Δ gehörigen Elemente A, T_1, T_2, t_1, t_2, τ_1 bzw. τ_2 treten jetzt die in **1** gleichbezeichneten Elemente von Γ und die Fläche Ψ geht in die in **1** betrachtete Regelfläche Φ über. Letztere enthält demnach die Achse A von Γ und ihre harmonische Doppelerzeugende fällt (als einfache Leitlinie von Γ) ins Unendliche. Ferner wird die Ebene $\lambda = [p\, L_u]$ zur unendlichfernen Ebene Ω, die die schon erwähnten Minimalerzeugenden von Γ enthält. Letztere schneiden L_u in den absoluten Punkten i_1 und i_2 der Richtebenen von Γ. Φ wird daher nach Obigem von Ω in diesen Punkten berührt und das Gleiche gilt auch für die zu Ω bezüglich τ_1 und τ_2 harmonische Ebene, also für die in **1** als Grundrißebene benutzte Symmetrieebene μ von τ_1 und τ_2. Somit schneidet μ die Fläche Φ nach einem, die Achse A von Γ schneidenden Kreis und damit ist im wesentlichen der Satz 2 abermals nachgewiesen.

Liegt p nicht in Ω, handelt es sich also um eine Zentralbeleuchtung des Plückerschen Konoids, so ist $\lambda = [p\, L_u]$ eine (beliebige) zu μ parallele Ebene. Die nach Satz 3 zu p gehörige Fläche Ψ besitzt sodann gleichfalls die unendlichferne Gerade L_u als harmonische Doppelerzeugende. Die Schnittkurve von Ψ mit μ ist daher ein A schneidender Kegelschnitt H. Derselbe ist aber nach **1** der Ort der Mitten aller jener auf Γ befindlichen Ellipsen B, deren Hauptachsen den Erzeugenden von Ψ angehören. Die Ebenen dieser Ellipsen gehen daher durch den gegebenen Lichtpunkt p. Daraus folgt: Die gesuchten (in $\mathfrak{K}$ enthaltenen) Kreise B^m haben ihre Mitten auf dem Kegelschnitt H.

Um H zu ermitteln, beachte man, daß seine unendlichfernen Punkte (nach Obigem) in jene Punkte u_1 und u_2 von L_u fallen, in denen Ψ von μ berührt wird, ferner, daß die unendlichfernen Punkte t_1 und t_2 der Torsallinien T_1 bzw. T_2 von Γ (als Doppelpunkte der auf L_u befindlichen Involution) zu u_1 und u_2 harmonisch sind. Somit sind t_1, t_2 Ecken des Hauptpoldreiecks von H, mit anderen Worten: die Achsen von H sind zu T_1 bzw. T_2 parallel. Wir suchen ferner (wie oben für Δ) die durch p gehende Transversale P von T_1 und T_2. Zu diesem Zweck sei Γ wie in **1** im Normalriß auf die Ebene μ dargestellt (s. Abb. 9). Der Lichtpunkt sei durch seinen Normalriß p^m und seine (nach aufwärts positiv genommenen) Normalabstände $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ von τ_1 bzw. τ_2 gegeben. Sind d_1 und d_2 die Schnittpunkte von P mit T_1 bzw. T_2, so ist

$$\overline{p\, d_1} : \overline{p\, d_2} = \overline{p^m d_1{}^m} : \overline{p^m d_2{}^m} = \mathfrak{p}_1 : \mathfrak{p}_2 \qquad (1).$$

Danach ist p^m eindeutig bestimmt und kann sofort gezeichnet werden.

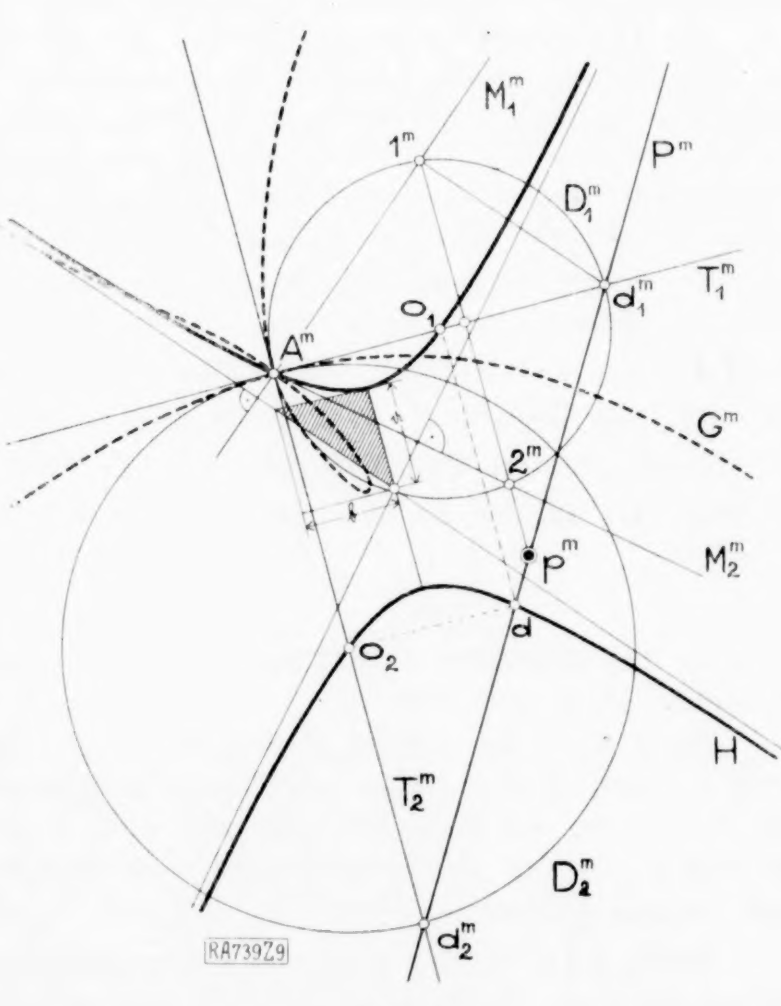


Abb. 9

[1]) Vergl. z. B. K. Zindler, Liniengeometrie II, (1906), S. 64.

Durch P gehen drei Tangentialebenen von Γ, nämlich die Ebenen $\delta_1 = [P\,T_2] = [T_2\,d_1]$, $\delta_2 = [P\,T_1] = [T_1\,d_2]$ und die Ebene δ, für die P eine Fallinie ist. Die in den Ebenen δ_1 und δ_2 liegenden Ellipsen D_1 und D_2 berühren bekanntlich[1]) die Torsallinien T_2 bzw. T_1 in deren Kuspidalpunkten. Mithin haben die Kreise $D_1{}^m$ und $D_2{}^m$ die Strecke $d_1{}^m\,A^m$ bzw. $d_2{}^m\,A^m$ zu Durchmessern. Der Grundriß der in δ liegenden Ellipse D von Γ hat (nach Nr. 1) $d_1{}^m$ und $d_2{}^m$ zu Gegenpunkten. D^m wurde in Abb. 9 nicht eingezeichnet. Die Mittelpunkte o_1, o_2 und d von $D_1{}^m$, $D_2{}^m$ und D^m sind bereits Punkte von H; sie bilden, wie aus der Abbildung ersichtlich ist, im Verein mit A^m ein H eingeschriebenes Rechteck.

Liegt p im Besondern in einer der Ebenen $\alpha_1 = [A\,T_1]$ und $\alpha_2 = [A\,T_2]$, so reduziert sich dieses Rechteck auf die Strecke $A^m o_1$ bzw. $A^m o_2$; A^m, o_1 (bzw. o_2) sind dann bereits Scheitel von H. In einem solchen Fall ist die Eigenschattenkurve von Γ sowie deren Schlagschatten auf μ bezüglich α_1 (bzw. α_2) orthogonal-symmetrisch.

Um die Asymptoten von H zu ermitteln, könnte man die Involution auf der harmonischen Doppelerzeugenden L verwenden. Rascher verständlich ist aber folgender Vorgang: Wir zeichnen zunächst die in der Ebene $\lambda = [p\,L] = [p \parallel \mu]$ liegenden Erzeugenden M_1 und M_2 von Γ. Dieselben enthalten u. a. die Schnittpunkte 1 und 2 von λ mit der Ellipse D_1. 1 und 2 werden erhalten, wenn man die durch p gehende (und zu T_2 parallele) Hauptlinie von δ_1 mit D_1 zum Schnitt bringt. Danach ist $M_1{}^m = [1^m A^m]$ und $M_2{}^m = [2^m A^m]$. Die durch M_1 gehenden Tangentialebenen von Γ schneiden diese Fläche bekanntlich nach Ellipsen, deren Grundrisse die Gerade $M_2{}^m$ im Punkt A^m berühren[2]). Insbesondere enthält die asymptotische Ebene von M_1, d. h. die Ebene λ die Erzeugende M_2 als Grenzfall einer Ellipse. Faßt man deren Grundriß $M_2{}^m$ als Kreis mit unendlichgroßem Radius auf, so liegt seine H angehörende Mitte in der zu $M_2{}^m$ senkrechten Richtung im Unendlichen. Analoges ergibt sich, wenn man M_1 mit M_2 vertauscht. Somit sind die Asymptoten von H zu $M_1{}^m$ bzw. $M_2{}^m$ senkrecht. H kann danach rasch gezeichnet werden. Bezeichnet man die zu T_1, T_2 parallelen Achsenstrecken von H mit $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$, so ist, wie sich aus Abb. 9 leicht ergibt (das schraffierte Dreieck und das $\triangle\, A^m\,1^m\,d_1{}^m$ sind nämlich ähnlich),

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{p}_1} : \sqrt{\mathfrak{p}_2}\,, \qquad (2),$$

wobei auch das Vorzeichen von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zu beachten ist.

Ist H gefunden, so ergibt sich der Grundriß G^m der Eigenschattengrenze G von Γ für den Punkt p als Lichtquelle punktweise mit Hilfe der in **1** angegebenen Grundkonstruktion. G^m kann auch nach Satz 1 aus dem ersten scheinbaren Umriß U^m von Ψ erhalten werden und ist eine zirkulare Kurve vierter Ordnung mit A^m als dreifachen Punkt und zwei zu $M_1{}^m$ bzw. $M_2{}^m$ parallelen Asymptoten. Die Tangenten von G^m im Punkt A^m sind $T_1{}^m$, $T_2{}^m$ und die Gerade $[p^m A^m]$.

Ist umgekehrt ein durch A^m gehender Kegelschnitt $\overline{H}$ mit zu T_1 bzw. T_2 parallelen Achsen gegeben, so gehen die Ebenen aller auf Γ befindlichen Ellipsen, deren Mitten auf $\overline{H}$ liegen, durch einen festen Punkt $\overline{p}$ des Raums. Um $\overline{p}$ zu finden, hat man nämlich zunächst jene Gerade $\overline{P}$ zu suchen, die durch den auf H befindlichen und A^m diametral gegenüberliegenden Punkt $\overline{d}$ geht und T_1 und T_2 schneidet. Sind $\overline{\mathfrak{a}}$ und $\overline{\mathfrak{b}}$ die Achsenstrecken von $\overline{H}$, so ist der auf $\overline{P}$ liegende Punkt, dessen Abstände von τ_1 und τ_2 das Verhältnis

$$\overline{\mathfrak{p}}_1 : \overline{\mathfrak{p}}_2 = \overline{\mathfrak{a}}^2 : \overline{\mathfrak{b}}^2$$

besitzen, der gesuchte Punkt $\overline{p}$. Die Konstruktion von H aus p ist mithin umkehrbar eindeutig. Also gilt der

Satz 4: *Die Mitten der auf einem Plückerschen Konoid Γ liegenden Ellipsen, deren Ebenen durch einen gegebenen Raumpunkt p gehen, erfüllen einen Kegelschnitt, dessen Achsen zu den Torsallinien von Γ parallel sind und der die Doppelgerade der Fläche in der Mitte zwischen den Kuspidalpunkten schneidet,*

sowie dessen Umkehrung:

Satz 4a: *Greift man aus der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ eine solche Reihe von ∞^1 Kreisen heraus, deren Mittelpunkte auf einem durch A^m gehenden Kegelschnitt liegen,*

[1]) Siehe E. Weyr, a. a. O., S. 97.

[2]) Siehe Rohn-Papperitz, a. a. O., S. 236.

dessen Achsen zu den Torsallinien von Γ parallel sind, so gehen die zu diesen Kreisen gehörigen Tangentialebenen von Γ durch einen festen Punkt des Raumes.

Denkt man sich zu allen möglichen Lagen von p den nach Satz 4 entsprechenden Kegelschnitt H ermittelt, so ist dadurch eine Abbildung der ∞^3 Punkte des Raumes auf die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}$ der in μ liegenden und durch A^m gehenden Kegelschnitte mit parallelen Achsen gegeben.

Hierbei ist der Zusammenhang zwischen der räumlichen Lage von p und der Art und dem Achsenverhältnis von H bereits durch die Relationen (1) und (2) klargestellt. Man erkennt hieraus, daß je ∞^1 in $\mathfrak{K}$ enthaltene Kegelschnitte mit gleichem Achsenverhältnis die Bilder der Punkte einer zu μ parallelen Ebene sind. Die verschiedenen, hierbei möglichen Fälle sind aus folgender Tabelle ersichtlich.

	Lage von p im Raum	$\mathfrak{p}_1 : \mathfrak{p}_2$	Art des Kegelschnitts H	$\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$
1.	in der unendlichfernen Ebene Ω	$+1$	Kreis	$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$
2.	zwischen Ω und τ_1	$< +1, \quad > 0$	Ellipse	$\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$
3.	in τ_1	0	Parabel	$\mathfrak{b} = \infty$, Achse $\parallel T_2$
4.	zwischen τ_1 und μ	$< 0, \quad > -1$	Hyperbel	$\lvert\mathfrak{b}\rvert > \lvert\mathfrak{a}\rvert$
5.	in μ	-1	gleichseitige Hyperbel	$\lvert\mathfrak{b}\rvert = \lvert\mathfrak{a}\rvert$
6.	zwischen μ und τ_2	$< -1, \quad > -\infty$	Hyperbel	$\lvert\mathfrak{a}\rvert > \lvert\mathfrak{b}\rvert$
7.	in τ_2	$-+\infty$	Parabel	$\mathfrak{a} = \infty$, Achse $\parallel T_1$
8.	zwischen τ_2 und Ω	$< \infty, \quad > +1$	Ellipse	$\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$

Hierin ist 1 der früher untersuchte Fall der Parallelbeleuchtung des Plückerschen Konoids (s. Satz 2 und 2a). Im Fall 5 ist H eine gleichseitige Hyperbel, die auch den Lichtpunkt p (und zwar als Gegenpunkt von A^m) enthält. Zu 2 und 6 sei ferner bemerkt, daß die reelle Achse von H immer zu T_2^m bzw. T_1^m parallel ist, je nachdem p höher oder tiefer liegt als jener Punkt von Γ, dessen Grundriß mit p^m zusammenfällt.

Die Fälle 3 und 7 bedürfen noch einer näheren Erläuterung. Liegt nämlich p z. B. in τ_1, so gehören nach Früherem die in τ_1 befindlichen und durch den Punkt $t_2 = [T_2 L_u]$ gehenden Strahlen von $\mathfrak{N}$ (s. auch Abb. 8) der Regelfläche Ψ^p an. Ψ^p ist daher nach Abspaltung dieses Strahlbüschels nur mehr von dritter Ordnung. Für diese Fläche ist T_1 die einfache, T_2 die doppelte Leitlinie.

Zwischen den Punkten dieser beiden Geraden besteht daher eine (2, 1)-Korrespondenz. Da hierin, wie leicht zu zeigen ist, dem Punkt $t_2 = [T_2 L_u]$ (als Verzweigungspunkt) der doppelt zu zählende Punkt $t_1 = [T_1 L_u]$ entspricht, ist L_u eine Torsallinie von Ψ^p mit t_2 als Kuspidalpunkt. Hieraus folgt, daß jede durch L_u gelegte Ebene die Regelfläche Ψ^p nach einer Parabel schneidet, deren Achse parallel zu T_2 ist. Somit ist der zu p gehörige Kegelschnitt H als Schnitt von Ψ^p mit μ gleichfalls eine solche Parabel.

Um H zu ermitteln, beachten wir, daß der durch p gehende Strahl P des Netzes $\mathfrak{N}$ nunmehr parallel zu T_2 ist (Abb. 10). Die in der Ebene $\delta = [P T_2]$ liegende Ellipse D von Γ berührt daher P in

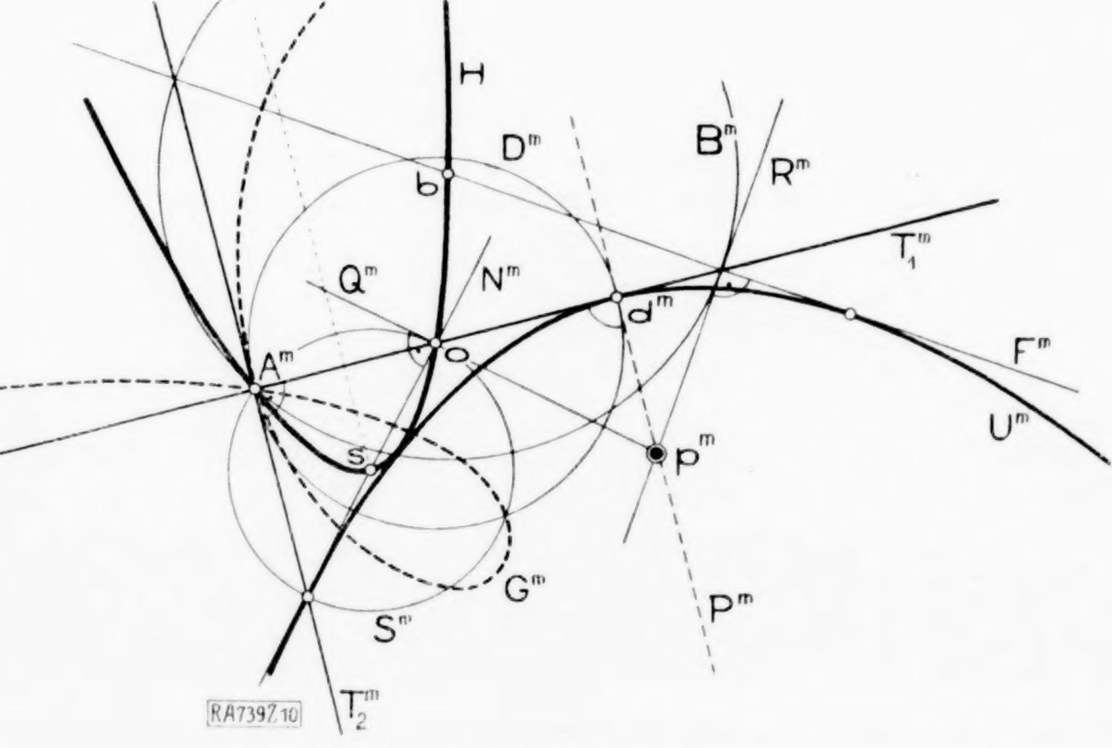


Abb. 10.

deren Schnittpunkt d mit T_1 und $\overline{d^m A^m}$ ist ein Durchmesser von D^m. A^m und die Mitte o von D^m sind ferner zwei Punkte von H, deren Symmetrale die Achse von H enthält. Zeichnen wir durch o senkrecht zur Geraden $Q^m = [o\, p^m]$ die Gerade N^m und betrachten wir diese als Grundriß eines Strahles N von $\mathfrak{N}$, so ist die Mitte des zu N gehörigen Kreises S^m von $\mathfrak{K}$ (s. **1**) der Scheitel von H. Die Konstruktion der zu einem Punkt p von τ_1 gehörigen Parabel H ist mithin umkehrbar eindeutig. Analoges gilt für den Fall 7 in obiger Tabelle.

Da im vorliegenden Fall p in τ_1 (oder τ_2) liegt, zerfällt die Eigenschattengrenze G von Γ in die Torsallinie T_1 (bzw. T_2) und in eine Raumkurve dritter Ordnung. Der Grundriß G^m der letzteren ist eine zirkulare Kurve dritter Ordnung mit A^m als Doppelpunkt, also eine Fußpunktenkurve einer Parabel. Dies stimmt (gemäß Satz 1) auch damit überein, daß der erste scheinbare Umriß U^m der zu p gehörigen Regelfläche Ψ eine Parabel ist. Man erkennt dies am einfachsten mit Hilfe der in τ_1 befindlichen Hauptlinien R der durch p gehenden Tangentialebenen von Γ[1]. U^m hat den Punkt p^m zum Brennpunkt und T_1^m zur Scheiteltangente. Da letztere den Doppelpunkt von G^m enthält, ist somit G^m im Fall 3 und 7 eine sogenannte Ophiuride[2])

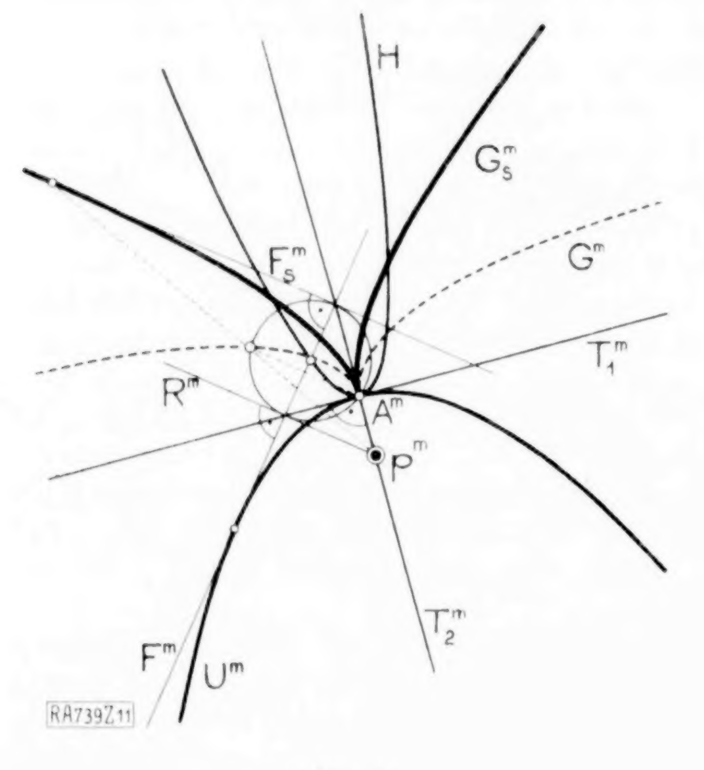


Abb. 11.

Es sei hier noch auf einen Sonderfall von 3 und 7 hingewiesen, der anscheinend (auch für allgemeine Regelflächen dritten Grades) noch nicht beachtet wurde. Liegt nämlich p in τ_1 (oder τ_2) und zugleich in der schon genannten Ebene $\alpha_2 = [T_2\, A]$ bzw. $\alpha_1 = [T_1\, A]$, also in den zu T_1 bzw. T_2 normalen Geraden $S_1 = [\tau_1\, \alpha_2]$ oder $S_2 = [\tau_2\, \alpha_1]$, so haben die Parabeln H und U^m den Punkt A^m zum Scheitel (s. Abb. 11). G^m ist demnach in diesem Fall eine Zissoide des Diokles mit der Spitze in A^m und die Eigenschattengrenze G von Γ ist — abgesehen von T_1 (bzw. T_2) — wegen der Symmetrie bezüglich α_2 (α_1) eine zu G^m affine ebene Kurve dritter Ordnung mit einer Spitze in k_2 (k_1). Daß G im Raum eine ebene Kurve ist, ergibt sich auch rechnerisch ohne weiteres. Wird nämlich das (rechtwinkelige) Koordinatensystem so gewählt, daß der Ursprung in k_2 und die Z-Achse in A liegt und die X-Achse parallel zu T_1 ist, so lautet die Gleichung von Γ

$$\mathfrak{z}\,(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) - \mathfrak{h}\,\mathfrak{x}^2 = 0$$

und

$$\mathfrak{y}\,(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2) - \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}^2 = 0$$

stellt den durch die Zissoide G^m parallel zu A gelegten Zylinder ζ dar. Also gilt für die (eigentliche) Schnittkurve von Γ und ζ, d. i. G im Raum

$$\mathfrak{z}/\mathfrak{y} = \mathfrak{h}/\mathfrak{a} = \text{konst.}$$

Obiges Ergebnis liefert, projektiv verallgemeinert, (vgl. hierzu Abb. 8) den

Satz 5: *Ist Δ eine allgemeine Regelfläche dritten Grades mit den reellen getrennten Torsallinien T_1 und T_2 und den zugehörigen Kuspidalpunkten k_1 und k_2, bezeichnen ferner t_1 und t_2 jene Punkte, in denen T_1 bzw. T_2 die einfache Leitlinie von Δ treffen, und wird der Lichtpunkt p als ein (beliebiger) Punkt der Verbindungsgeraden $S_1 = [k_1\, t_2]$ von k_1 und t_2 (oder auf der Verbindungsgeraden S_2 von k_2 und t_1) gewählt, so ist die Eigenschattengrenze von Δ eine durch t_1 (bzw. t_2) gehende ebene Kurve dritter Ordnung mit einer Spitze in k_2 (bzw. k_1).*

Es sind noch jene Fälle zu untersuchen, bei denen p der Fläche Γ selbst angehört. In einem solchen Fall zerfällt der Kegelschnitt H in ein Paar von Geraden H_1 und H_2, von welchen wenigstens eine durch A^m geht und deren Symmtralen zu T_1^m bzw. T_2^m parallel sind. Die durch p gehenden Tangentialebenen von Γ bilden nämlich einer-

[1]) In Abb. 10 ist auch der Grundriß F einer Erzeugenden von Ψ eingezeichnet.

[2]) Siehe H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908, S. 37.

seits das Ebenenbüschel, dessen Träger die durch p gehende Erzeugende E von Γ ist, andererseits einen Kegel zweiten Grades mit dem Scheitel in p. Die zu diesen Ebenen gehörigen Kreise B^m von $\mathfrak{K}$ erfüllen daher das parabolische Büschel, für das der Grundriß der E schneidenden Erzeugenden $\overline{E}$ von Γ die gemeinsame Tangente ist, und das hyperbolische Kreisbüschel mit den Grundpunkten A^m und p^m (s. Abb. 12 a).

Die Achsen dieser Büschel bilden das p entsprechende, in $\mathfrak{H}$ enthaltene Geradenpaar. Die zu p gehörige Regelfläche Ψ zerfällt jetzt in zwei hyperbolische Paraboloide mit je einer horizontalen Richtebene. Das eine von diesen ist gleichseitig und hat die Erzeugende E und die Achse A von Γ zu Scheitelerzeugenden; das zweite ist durch die Geraden T_1, T_2 und H_2 als Leitlinien bestimmt. Die Grundrisse der Erzeugenden der ersteren Fläche sind parallel H_2; der erste scheinbare Umriß der letzteren ist eine leicht zu zeichnende Parabel U^m (siehe Abb. 12 a). p^m ist ihr Brennpunkt und $\overline{E}^m$ ihre

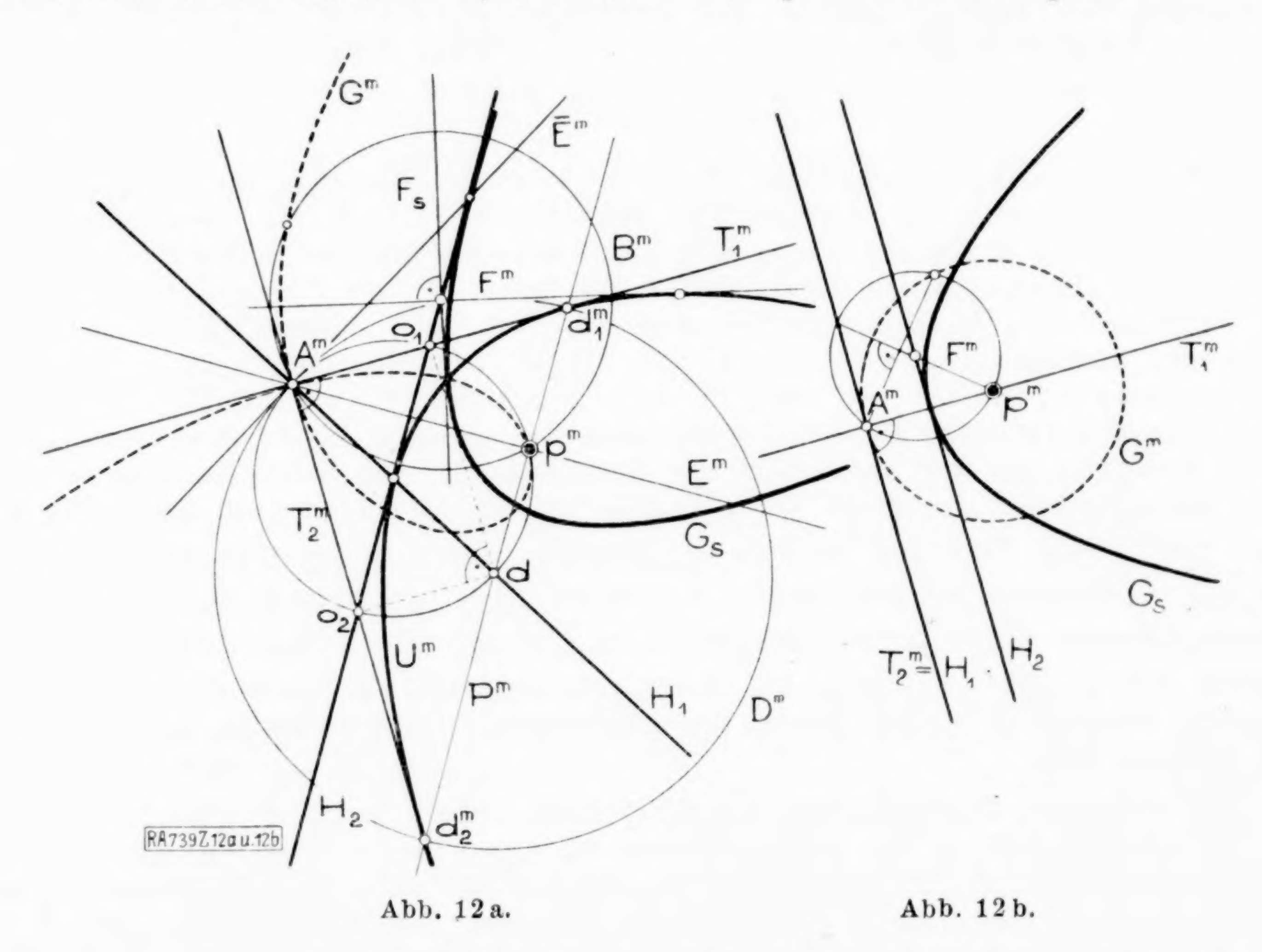


Abb. 12 a. Abb. 12 b.

Leitlinie[1]). Somit ist der Grundriß G^m der Eigenschattengrenze von Γ — als Fußpunktenkurve einer zentrisch ähnlichen Parabel — eine (i. a. schiefe) Strophoide mit A^m als Doppelpunkt. Da E zur Eigenschattengrenze zu zählen ist, ist in der Tat G im Raum — abgesehen von E — eine (durch p, k_1 und k_2 gehende) Raumkurve dritter Ordnung. G^m wird insbesondere zu einer geraden Strophoide, wenn p einer der in μ befindlichen Erzeugenden M_1 und M_2 von Γ angehört.

Liegt p insbesondere auf der Torsallinie T_1 (oder T_2), so gehört diese Gerade doppelt gezählt zur Eigenschattengrenze und H_1 und H_2 sind zu T_2 (bzw. T_1) parallel. Die eigentliche Eigenschattengrenze G von Γ ist dann eine Ellipse, deren Grundriß G^m den Punkt p^m zur Mitte hat. Letzteres folgt unmittelbar aus der in **1** angegebenen Grundkonstruktion (siehe Abb. 12 b). Ψ zerfällt nunmehr in vier Strahlbüschel.

Liegt p auf der Achse A von Γ, so besteht H aus zwei durch A^m gehenden Geraden, deren Symmetralen zu T_1 bzw. T_2 parallel sind; ist endlich p ein Punkt der unendlichfernen Leitlinie L_u, so ist H — abgesehen von L_u — ein Kreis mit unendlichgroßem Radius, nämlich eine durch A^m gehende Gerade. Die genannte

[1]) U^m berührt nämlich H_2 im Schnittpunkt mit H_1 und T_1^m und T_2^m sind zwei senkrechte Tangenten von U^m.

Abbildung ist mithin ausnahmslos eineindeutig. Die in $\mathfrak{H}$ enthaltenen zerfallenden Kegelschnitte entsprechen den Punkten von Γ.

Es soll noch eine beachtenswerte Grundeigenschaft dieser Abbildung aufgezeigt werden. Ist Z eine beliebige Gerade des Raums, so können durch sie i. a. drei Tangentialebenen ζ_1, ζ_2, ζ_3 von Γ gelegt werden. Die Mittelpunkte der in ζ_1, ζ_2, ζ_3 befindlichen und Γ angehörenden Ellipsen liegen daher immer auf dem Kegelschnitt H, sobald als Lichtpunkt p ein Punkt von Z gewählt wird. Da alle Kegelschnitte von $\mathfrak{H}$ den Punkt A''' gemeinsam haben, ist mithin nachgewiesen, daß die Bilder der Punkte jeder beliebigen Geraden des Raums ein in $\mathfrak{H}$ enthaltenes Kegelschnittbüschel bilden. Umgekehrt entspricht auch jedem solcher Büschel i. a. eine bestimmte Gerade des Raums. Wird Z als ein Strahl des Netzes $\mathfrak{N}$ angenommen, so sind die Grundpunkte des zugehörigen Kegelschnittbüschels die Ecken $A''' o_1 d o_2$ des in Abb. 9 eingezeichneten Rechtecks. Mit Hilfe der genannten Abbildung ließe sich ohne weiteres — ähnlich wie in der Zyklographie[1]) — die Geometrie der in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Kegelschnitte auf den Raum übertragen. Ein weiteres Eingehen auf diesen Gedanken würde aber den Rahmen der vorliegenden Arbeit überschreiten.

Ueber den Schlagschatten des Plückerschen Konoids für beliebige Zentralbeleuchtung ergibt sich im wesentlichen dasselbe wie in **2** für Parallelbeleuchtung. Ersetzt man nämlich den absoluten Kegelschnitt durch einen in der Ebene $\lambda = [p L_u]$ liegenden Kegelschnitt W, dessen Mitte der Achse A von Γ angehört, und für den die in λ befindlichen Erzeugenden M_1 und M_2 die Asymptoten sind, so ist die Konstruktion des Schlagschattens G_s von Γ auf die zu λ bezüglich τ_1 und τ_2 harmonische Ebene projektiv-äquivalent mit der in **2** angegebenen Konstruktion von C_s. G_s ist demnach eine dreispitzige Pseudohypozykloide, also eine Kurve vierter Ordnung, dritter Klasse, die die unendlichferne Gerade L_u in den Schnittpunkten m_1 und m_2 von M_1 bzw. M_2 mit L_u berührt. Diese Punkte können nun auch reell sein. Der Schlagschatten von Γ auf jede zur Richtebene parallele Ebene $\bar{\mu}$ ist eine zentrisch ähnliche Kurve G_s. Bezeichnen wir die durch p parallel A gelegte Gerade mit $\bar{A}$, so enthalten die Minimalebenen durch $\bar{A}$ die uneigentlichen Erzeugenden von Γ. Daraus folgt: Der Normalriß von p auf μ ist stets ein Brennpunkt von G_s (siehe auch die unten besprochenen Sonderfälle!). Im Sinne der genannten Pseudogeometrie gilt auch der zu Satz 2 analoge Satz.

Die kollineare Uebertragung versagt jedoch, sobald p auf Γ oder in τ_1 (bzw. τ_2) liegt. Im ersteren Fall ist der Schlagschatten G_s von Γ auf μ eine Parabel[2]), für die p''' der Brennpunkt und H_1 die Leitlinie ist (siehe Abb. 12a). Die Tangenten F_s und G_s sind nämlich die Schnittlinien der durch p gehenden Tangentialebenen von Γ mit μ (vergl. **2**). Die Geraden F_s werden aber erhalten, wenn man zu den Tangenten F''' von U''' in deren Schnittpunkten mit H_2 die Normalen legt. Ist p insbesondere ein Punkt von T_1 (oder T_2), so ist $H_1 = T_2'''$ (bzw. T_1''') die Leitlinie von G_s (siehe Abb. 12b).

Liegt endlich p in τ_1 oder τ_2, so zerfällt $\bar{G}_s$ in L_u und eine Kurve dritter Ordnung, dritter Klasse. Letztere wird insbesondere zu einer Neïlschen Parabel, wenn p in τ_1 (bzw. τ_2) liegt und zugleich der schon erwähnten Ebene $\alpha_2 = [A T_2]$ (bzw. $\alpha_1 = [A T_1]$) angehört (siehe auch Abb. 11). Um dies zu beweisen, betrachten wir den zentrisch-ähnlichen Schlagschatten G_s von Γ auf die Torsalebene $\tau_2 (\tau_1)$. Die Tangenten F_s''' dieser Kurve ergeben sich (analog wie oben), wenn man zu den Tangenten von U''' in deren Schnittpunkten mit $T_2''' (T_1''')$ die Normalen zeichnet. Dieselben sind aber zugleich die Normalen jener Parabel, die zu U''' bezüglich p''' zentrisch-symmetrisch ist. Also ist G_s''' in der Tat die Evolute einer Parabel. 739

[1]) Vergl. E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie, II. Bd., Zyklographie (wird demnächst erscheinen).

[2]) Dies folgt auch daraus, daß der Schlagschatten von Γ auf μ in diesem Fall ein Kegelschnitt ist, der die unendlichferne Leitlinie berühren muß.

Über ein neues allgemeines Verfahren zum Entwerfen von graphischen Rechentafeln (Nomogrammen), insbesondere von Fluchtlinientafeln. II.[1]

Von **ALEXANDER FISCHER** in Göding (Mähren).

III. Einige Anwendungen[2].

1. Einige Fluchtlinientafeln der ersten beiden kanonischen Formen. α) Als erstes Beispiel diene die bekannte Gleichung für sphärische Spiegel und Linsen[3]:

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{C}.$$

Sie gehört der ersten kanonischen Form an. Abb. 5 zeigt die bekannte Figur in dem Koordinatensystem mit 60^0 als Achsenwinkel, die man bei Verwendung gewöhnlicher Maßstäbe erhält.

β) Bei Wahl logarithmischer Maßstäbe sei:

a) $f_1 > 0$, $f_2 > 0$. (Auf diesen Fall ist der Fall $f_1 < 0$, $f_5 < 0$ ohne weiteres zurückführbar, werde daher nicht weiter behandelt.)

Es ergibt sich als Gl. d. A. G.: $f_1 + f_2 x = y$ . . . . (I),
als Gl. des L.K.: $x = 1$ . . . . (II),
Die B. erfolgt nach $y = f_3$ . . . . (III).

Abb. 6a zeigt den Fall $A = 2$, $B = 4$, $C = \frac{4}{3}$.

b) $f_1 < 0$, $f_2 > 0$, $|f_1| < |f_2|$. Es ist (I) dann zu schreiben

$$+(-f_1) + f_2 x = y \quad \text{. . . . . (I')}$$

und ergibt sich die Lösung $+f_3$ mit Hilfe des Astes $+-$.

Abb. 6b zeigt den Fall $A = -3$, $B = 3$, $C = 6$.

c) $f_1 < 0$, $f_2 > 0$, $|f_1| > |f_2|$. Es ist (I) dann in der Form

$$+(-f_1) - f_2 x = -y = Y \quad \text{(II')}$$

zu schreiben und ergibt sich die Lösung $(-f_3)$ mit Hilfe des Astes $-+$.

Abb. 5.

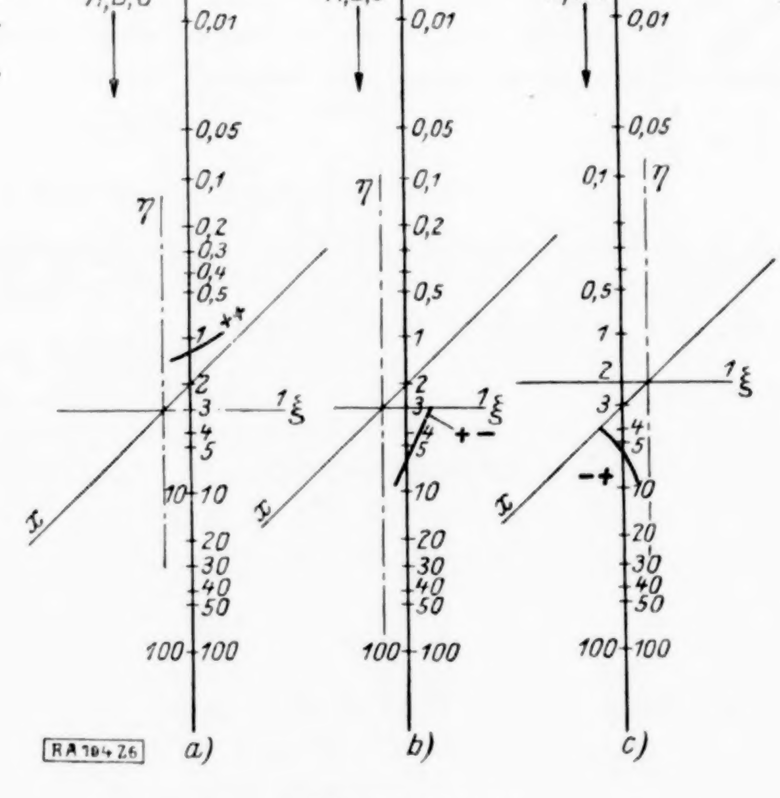


Abb. 6a bis 6c.

---

[1]) Vergl. diesen Bd. S. 211 bis 227. — Es sei an die Bedeutung der Abkürzungen erinnert: Gl. = Gleichung, A. G. = Ablesegerade, A. F. = Ablesefaden, A. K. = Ablesekreis, L. K. = lösende Kurve, B. = Bezifferung.

[2]) NB. Von der ausdrücklichen Einführung von Maßstabfaktoren wurde meist abgesehen. In den Abbildungen sind Hilfslinien des Entwurfs, insbesondere Asymptoten, gestrichelt.

[3]) Vergl. z. B. M. d'Ocagne (1), S. 211.

Abb. 6c zeigt $A = -2$, $B = 3$, $C = -6$.

Da die kanonische Form in Bezug auf f_1 und f_2 symmetrisch ist, so genügt die Behandlung der drei Fälle. Die Untersuchung der absoluten Werte geschieht durch die Tafel selbst, indem, falls sich keine Lösung für die betreffende Aststellung ergibt, die des anderen mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen ist.

Bezüglich der Geradenbildtafel ist folgendes ein für alle Mal zu sagen: Die Gerade x (s. Abb. 1a) ist auf den Funktionswert ihres Koeffizienten, die Wagrechte 1 auf jenen des ihren einzustellen. Der Schnittpunkt des betreffenden durch die Gl. d. A.G. vorgeschriebenen Astes mit der L.K. gibt die Lösung.

γ) Ein Beispiel für kreisförmige Ableselinie gibt die Multiplikationstafel $AB = C$ gewählt. (Logarithmieren!) Abb. 7 zeigt die Lösung für $A = 5$, $B = 2$, $C = 10$.

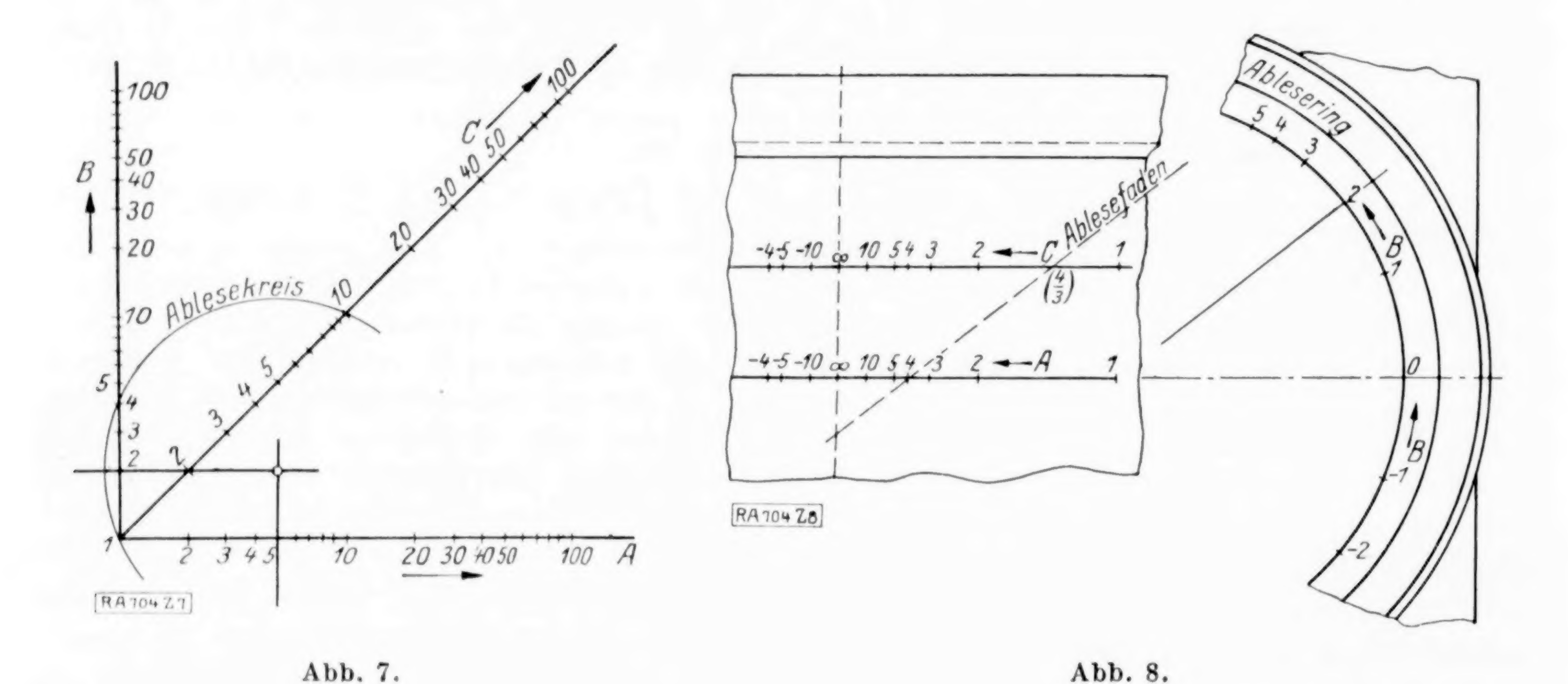


Abb. 7. Abb. 8.

δ) Rechenschieber: Die Tafel für die in α) und β) behandelte Gleichung zeigt Abb. 8. Es ist hierbei wie stets — wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil vermerkt ist — die Transformationsgleichung (a) benutzt worden. Das angegebene Beispiel zeigt $A = 4$, $B = 2$, $C = \frac{4}{3}$.

Zweite kanonische Form.

α) Gewöhnliche Maßstäbe. Ein Beispiel für die unmittelbare Verwendung der zweiten kanonischen Form gibt die folgende Tafel für die Dicke der Röhren und Zylinder, die auf Grund der Formel

$$m = \sqrt{\frac{R+p}{R-p}} - 1$$

entworfen wurde[1]). Hierin bedeutet m das Verhältnis zwischen Dicke und innerem Halbmesser des Rohres für die Werte p und R des inneren Druckes und des Maximums der Materialspannung in der Rohrwand. Nach Trennung der Veränderlichen ist

$$R = p\,\frac{(m+1)^2+1}{(m+1)^2-1}.$$

Setzt man $(m+1)^2 - 1 = z$, $p = \frac{1}{2}\frac{x}{y}$, so ist mit $\mu_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_2 = 1$, $-a = c = 1$, $k_0 = -1$, $k_1 = k_2 = 0$

die Gl. d. A.G.: $$-\frac{x}{z} + Ry = 1 \quad \text{(I)},$$

die Gl. d. L.K. $$x = 2 \quad \text{(II)},$$

die B. erfolgt nach: (s. Abb. 9). $$p = \frac{1}{y} \quad \text{(III)}$$

---

[1]) Siehe R. Soreau (1a), S. 187.

β) Als Anwendung **kreisförmiger Ableselinie** ist die **Multiplikationstafel** $AB = C$ in der Form $f_1 = \frac{1}{C}$, $f_2 = B$, $f_3 = -\frac{1}{A}$ zu benutzen. Die eingezeichnete Stellung gibt $A = 1$, $B = 2$, $C = 2$ (Abb. 10).

γ) **Rechenschieber:** Die **Multiplikationstafel** ist für die erste Wahl der Transformationsgl. (a) in Abb. 11 gegeben. Sie ist in der Form $\frac{1}{C} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B}$ mit $f_1 = C$, $f_2 = \frac{1}{A}$, $f_3 = -B$ zu vertafeln, In Abb. 11 ist mit $a = 1$ die Multiplikation $A = 0{,}5$, $B = 5$, $C = 2{,}5$ dargestellt.

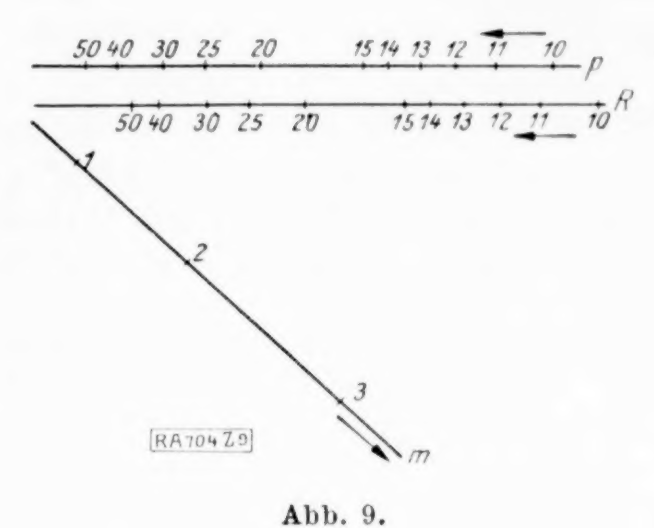


Abb. 9.

Die Anwendung von Multiplikatoren ist bei jenen Fällen angezeigt, wo beide Zahlen entweder sehr groß oder sehr sehr klein sind oder von verschiedener Größenordnung sind. Es ist die gegebene Gleichung zu schreiben

$$10^m A.\ 10^m B = 10^{m+n} C \qquad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \gtreqless 0,$$

wo m und n passende Zahlen sind. Im letztgenannten Falle sind m und n von verschiedenem Vorzeichen zu nehmen.

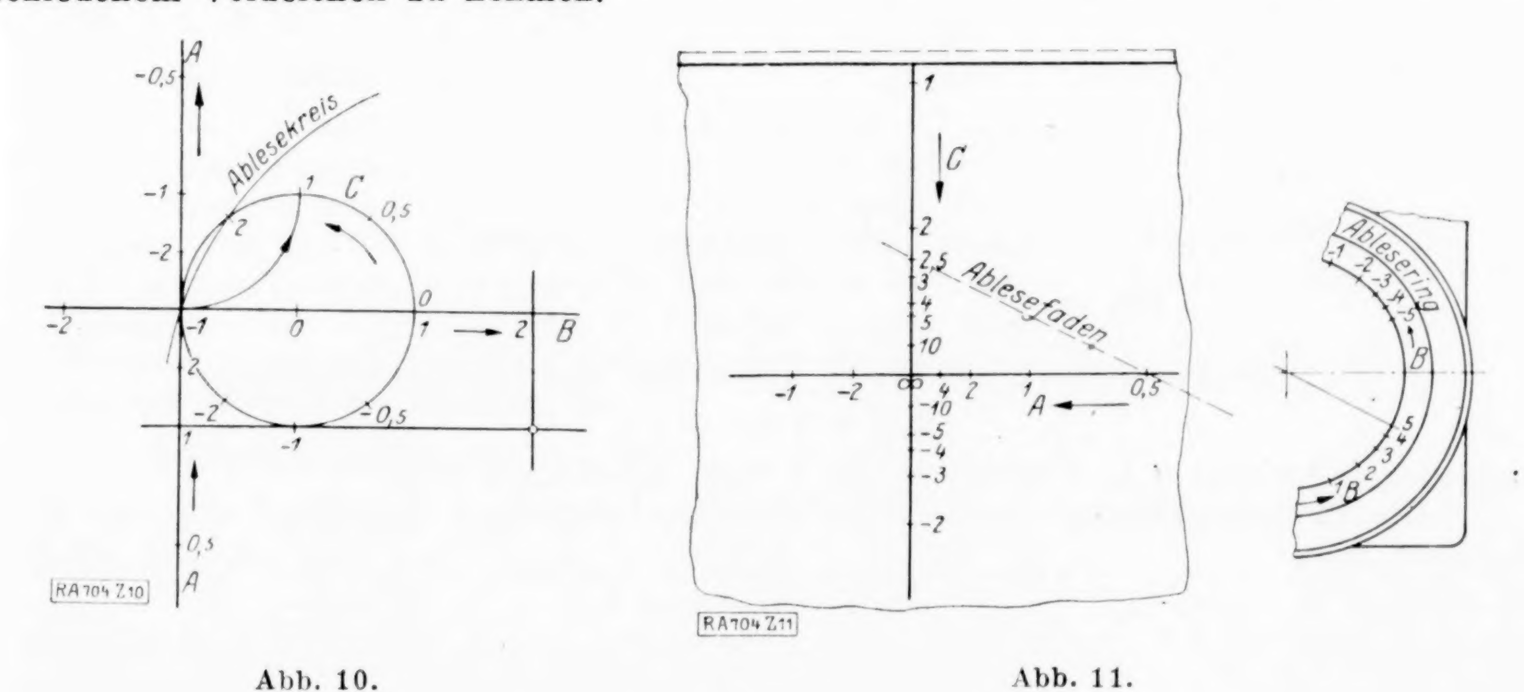


Abb. 10. Abb. 11.

2. Dreigliedrige algebraische Gleichungen: $x^m + ax^n + b = 0$ (a, b beliebige, m, n festgelegte Konstanten). Es ist also

$$f_3 \equiv x^m,\ f_2 \equiv b,\ f_1 \equiv a,\ g_3 \equiv x^n.$$

α) Gewöhnliche Maßstäbe. Als besonderer Fall möge die quadratische Gleichung behandelt werden. Für diese gibt H. Schwerdt (1) bereits Tafeln in Kartesischen Koordinaten; es sollen seine Ergebnisse nach dem neuen Verfahren hergeleitet werden. Die Gl. laute:

$$\gamma^2 + \alpha\gamma + \beta = 0.$$

Die Anwendung der allgemeinen Vorschrift gibt mit $a = 0$, $c = 1$

$$\alpha \frac{\gamma}{\gamma^2 - b} + (\beta + b) \frac{1}{\gamma^2 - b} + 1 = 0.$$

Je nach der Wahl der Konstanten b, μ_1, μ_2 erhält man die Abb. 12 und 13, die mit den Abb. 95 und 96 des Buches von H. Schwerdt (1) identisch sind[1]).

a) Setzt man $b = 0$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = l$, so ergibt sich

als Gl. d. A.G.: $\alpha\eta + \beta l \xi = -1$ . . . . (I),

als Gl. d. L.K.: $\eta^2 = l\xi$ . . . . (II),

ihre B. erfolgt nach: $\gamma = -\alpha$ oder auch $\gamma = \sqrt{-\beta}$ . . . . (III).

(S. Abb. 12, die mit $l = 0{,}5$ entworfen wurde.)

[1]) S. 180. — Auch in dem Werke von V. Láska-V. Hruška (1) finden sich mit diesen Abbildungen wesentlich identische mit verschiedener Herleitung.

b) Will man einen Kreis als L.K. erhalten, so ist zu setzen: $\mu_1 = -a$, $\mu_2 = a^2$, $b = -\frac{1}{a^2}$; man erhält dann

als Gl. d. A.G.: $\eta a \alpha + (1 - \beta a^2) \xi = 1$ . . . . (I),

als Gl. d. L.K.: $\xi^2 + \eta^2 = \xi$ . . . . (II),

ihre B. erfolgt nach: $\gamma = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{\xi} - 1} = \sqrt{-\beta}$ . . . . (III).

Die Teilung auf dem Kreis ist, wie H. Schwerdt bemerkt, stereographisch (s. Abb. 13, die von ihm mit $a = 1$ entworfen wurde). Benutzt man schiefwinklige Koordinaten, so geht der Kreis in eine Ellipse über.

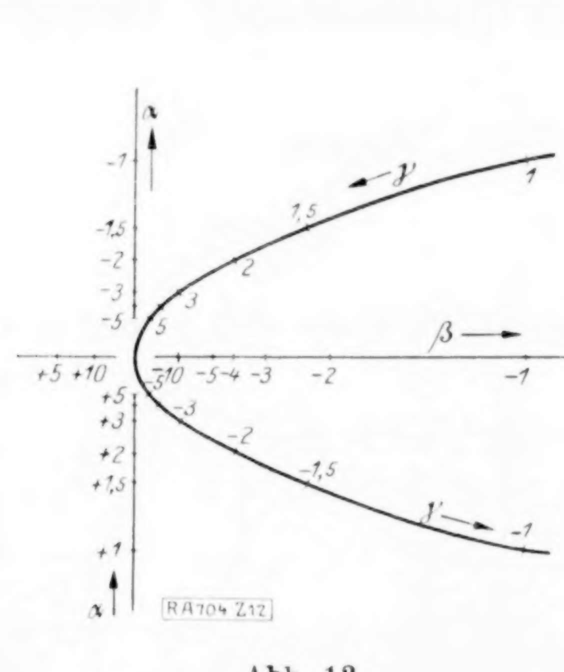


Abb. 12.

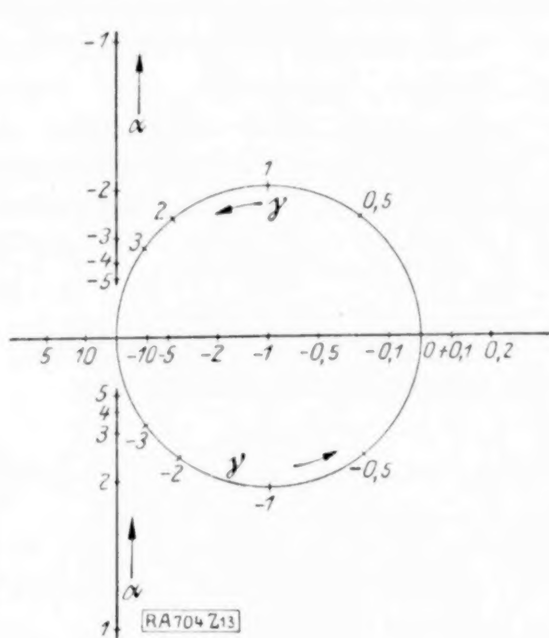


Abb. 13.

β) Logarithmische Maßstäbe: Es werde hier von der Gleichung

$$a x_1^m + b x_1^n + c = 0$$

ausgegangen, worin a, b, c beliebige, m, n feste Konstanten sind.

Die R. Mehmkesche Lösung wird erhalten, indem man setzt: $x_1^m = y$, $x_1^n = x$. Es lautet dann

die Gl. d. A. G. $a y + b x + c = 0$ . . . . (I),

die Gl. d. L. K. $y = x^{m/n}$ . . . . (II),

deren B. nach $x_1 = x^{1/m}$ . . . . (III)

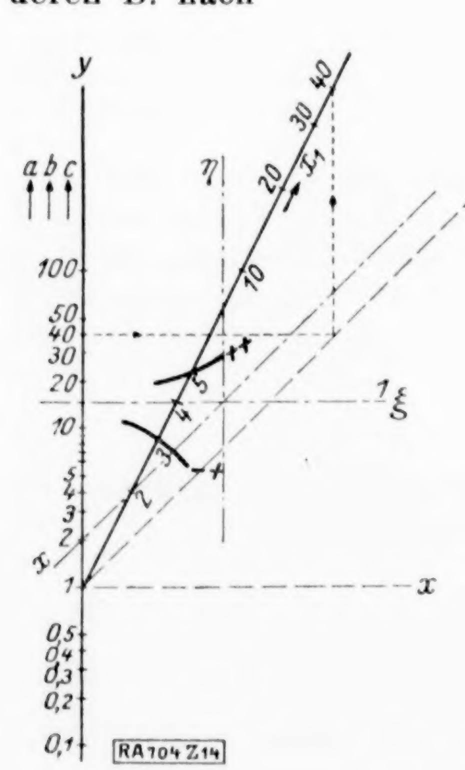


Abb. 14.

erfolgt. Hierbei kann die B., wie dies Mehmke tut, in einfachster Weise über das (geradlinige) Bild der durch Gl. (III) dargestellten Kurve erfolgen (s. Abb. 14).

Geht man, von $x_1 = u/v$ aus, so daß die Gleichung lautet:

$$a u^m + v^{m-n} (b u^n + c v^n) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (a),$$

schreibt für die beiden Glieder in der Klammer z. B. vor:

$$b u^n + c v^n = -a,$$

und setzt $u^n = x$, $v^n = y$, so hat man auch eine durch die Geradenbildtafel lösbare Form. Läßt man die Veränderlichen u, v, so hat man den von R. Mehmke behandelten Fall der Auflösung eines Paares von dreigliedrigen Gleichungen mit zwei Unbekannten. Ebenso kann man Potenzen von neuen Unbekannten einführen oder auch die Gl. (a) durch $u^r v^s$ (r, s beliebige Konstanten) dividieren und dann erst den Klammerausdruck $-a$ gleichsetzen, u. ä.

In Abb. 14 ist die Lösung der quadratischen Gleichung

$$x_1^2 + 2 x_1 - 15 = 0$$

durchgeführt. Es ist hierbei, wie schon erwähnt, die Geradenbildtafel so zu orientieren, daß zunächst die mit x be-

zeichnete Gerade durch den Punkt 2, die mit 1 bezeichnete Wagrechte ξ durch den Punkt 15 hindurchgeht und hierauf die Tafel um $\log a$ zu verschieben, welche Verschiebung entfällt, da hier $a = 1$, $\log a = 0$ ist. Der Schnittpunkt des Astes $- +$ (gegenüber $+ -$ der Gl.!) mit der Geraden $y = x^2$ gibt $x_1 = 3$. Die negative Wurzel ergibt sich im Schnitt mit dem Ast $+ +$ (da die Gl. mit $x_1 = -z$ in $z^2 - 2z - 15 = 0$ übergeht) zu $x_1 = -5$.

γ) Kreisförmige Ableselinie: Wie schon erwähnt, betrachtet R. Soreau bloß diesen Sonderfall der Tafeln mit Ablesekreis und gibt als Beispiele die quadratische und reduzierte kubische Gl. Die Anmerkung, daß sich diese als Sonderfälle der Gl.

$$z^\alpha + z^\beta + p\,z^{\frac{\alpha-\beta}{2}} + q = 0$$

ergeben, die ebenfalls nach dem angegebenen Verfahren behandelt werden könnne, erweist sich nach dem Vorstehenden als überflüssig. Es sollen nun diese Beispiele ebenfalls besprochen werden:

a) Quadratische Gl. $z^2 + p\,z + q = 0$.
Mit $a = 0$, $b = -1$, $c = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$ ergibt sich

als Gl. d. A. K. $\quad -p\,\frac{2x}{x^2+y^2} - (q-1)\,\frac{2y}{x^2+y^2} = 1 \quad$ (I),

als Gl. d. L. K. $\quad y = -2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$ (II)

ihre B. erfolgt nach: $\quad z = -x/2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$ (III).

[(S. Abb. 15.) Daselbst ergeben sich für die Gl. $z^2 + z - 2 = 0$ die Lösungen $z = 1$, $z = -2$]. Wie R. Soreau bemerkt (abaque 83) ist diese Lösung mit der nach dem Verfahren von E. Lill erhaltenen[1]) identisch. Mit $a = 0$, $b = -1$, $c = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ergibt sich ferner der im Anschluß an die Gjerssewanoffschen Tafeln von R. Soreau gegebene abaque 130[2]) der also im wesentlichen mit abaque 83 identisch ist.

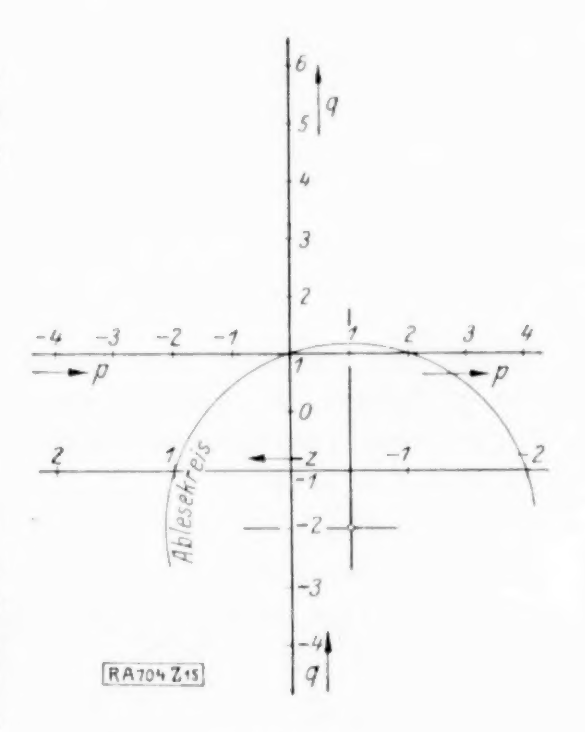


Abb. 15.

b) Reduzierte kubische Gl. $z^3 + p\,z + q = 0$.
Mit $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$ ergibt sich

als Gl. d. A. K. $\quad -(p-1)\,\frac{2x}{x^2+y^2} - q\,\frac{2y}{x^2+y^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$ (I),

als Gl. d. L. K. $\quad y^2 = 2x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$ (II),

deren B. nach $\quad z = y/2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$ (III)

erfolgt. In Abb. 16 ist die Lösung der Gl. $z^3 + 3z - 4 = 0$ gezeigt, es ergibt sich als die einzige reelle Wurzel $z = 1$ (abaque 84)[3]).

δ) Rechenschieber: a) Quadratische Gl. $z^2 + p\,z + q = 0$. Die erste Wahl ergäbe mit $\mu_1 = \mu_2 = -1$ als L. K. die Hyperbel $x\,y = -1$, deren B. nach $z = -x$ erfolgte. Die zweite Wahl ergibt mit $1/z = -y/x$, $z^2 = x$, $\mu_1 = -\mu_2 = 1$

als Gl. d. A. F. $\quad -q/x + p\,y/x = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$ (I),

als Gl. d. L. K. $\quad y^2 = x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$ (II),

ihre B. erfolgt nach $\quad z = -y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$ (III).

Abb. 17 zeigt die Lösung der Gl. $z^2 + z - 2 = 0$, es ergibt sich $z = 1$, $z_2 = -2$.

Ist in der gegebenen Gl. p und q sehr groß, so ergibt sich nach ihrer Multiplikation mit λ^2

$$(\lambda z)^2 + p\,\lambda\,(\lambda z) + q\,\lambda^2 = 0.$$

---

[1]) S. a. V. Láska-V. Hruška (1), S 63. Ueber das Lillsche Verfahren s. z. B. Mehmke (1).

[2]) R. Soreau (1b), S. 174.

[3]) Es sei erwähnt, daß diese Gl. auch in dem Lehrbuch von V. Láska-V. Hruška (1) behandelt wird. Hier wird jedoch zunächst eine Kurve 3. Ordnung erhalten und diese durch Inversion in die quadratische Parabel übergeführt. Wie ferner dem Aufsatze P. Luckey (3) zu entnehmen ist, findet sich diese Tafel auch in einem mir nicht zugänglichen Aufsatze von A. Adler, Graph. Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade. Zeitschr. d. Oest. Ing.- und Arch.-Vereins Bd. 42 (1890), S. 146.

Es ist für $\lambda < 1$ eine passende Potenz von 10 zu wählen und (λz) als neue Unbekannte anzusehen. Wird $\lambda = -1$ gewählt, so ist es möglich, mit bloß einer

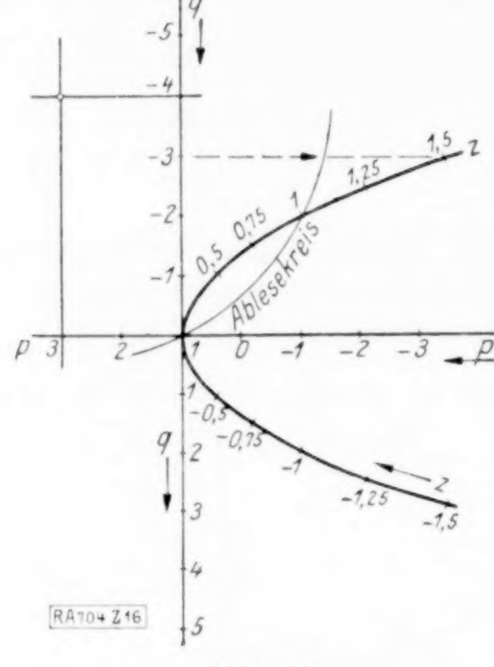


Abb. 16.

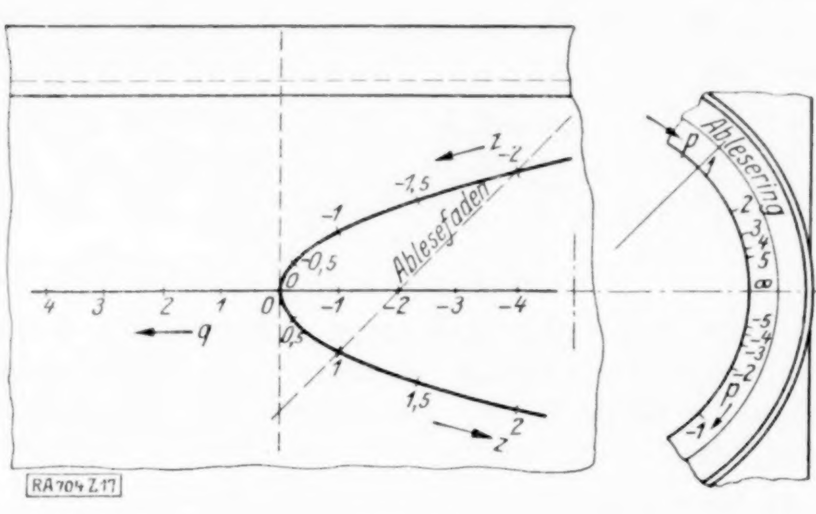


Abb. 17.

Hälfte der Parabel das Auslangen zu finden. Da diese Substitution bloß das Zeichen von p ändert, so kann folgende physikalische Deutung ausgesprochen werden: Wurzeln ungleichen Vorzeichens liegen auf dem Einfalls- und Reflexionsstrahle mit dem Einfallswinkel $\alpha = \operatorname{arctg} p$.

b) Kubische Gl. $\qquad z^3 + p\,z + q = 0.$

Die erste Wahl ergäbe mit $\mu_1 = -\mu_2 = 1$ als L. K. $x\,y^2 = 1$, deren B. nach $z = \pm\sqrt{x}$ erfolgte. Die zweite Wahl ergibt

als Gl. d. A. F. $\qquad -p\,y/x + q/x = 1 \quad \ldots \ldots \quad (I),$

als Gl. d. L. K. $\qquad y^3 = x \quad \ldots \ldots \quad (II),$

ihre B. erfolgt nach $\qquad z = -y \quad \ldots \ldots \quad (III).$

In Abb. 18 ergibt sich als reelle Wurzel der Gl. $z^3 + 3\,z - 4 = 0 : z = 1$.

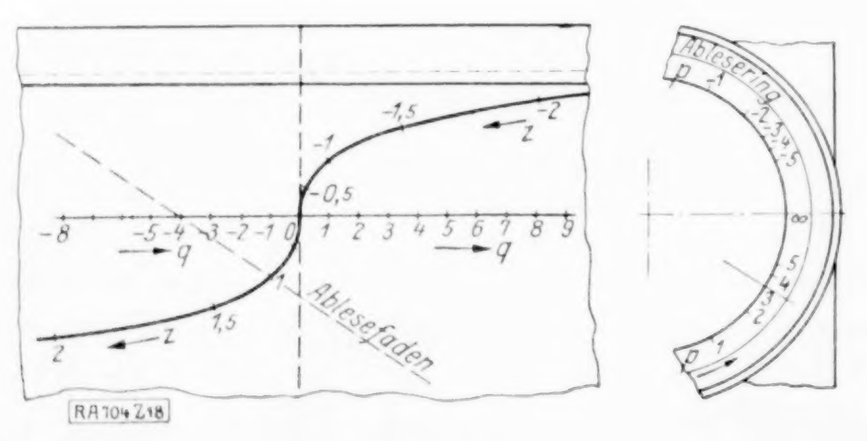


Abb. 18.

3. Keplersche Gleichung[1]:

Sie lautet:

$$\alpha - e \sin \alpha = \mu.$$

Hierin ist μ die mittlere, α die exzentrische Anomalie, beide im Bogenmaß gemessen, e die Exzentrizität der Planetenbahn.

α) Gewöhnliche Maßstäbe: Die einfachste Annahme über die freien Konstanten ergäbe eine ungünstige Tafelform. Es wurde daher $c = 1$, $a = 0{,}2$, $b = 1$ gewählt. Dann ergibt sich

als Gl. d. A. G. $\qquad (e + 1)\,y + (\mu + 1)\,x + 1 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (I),$

als Gl. d. L. K.

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{\sin\alpha}{\alpha - 0{,}2\sin\alpha - 1} \\ x &= \frac{1}{\alpha - 0{,}2\sin\alpha - 1} \end{aligned}\right\} \text{(II)} \quad y = x\sin\alpha \quad \ldots \ldots \quad (II'),$$

Es gestaltet sich die Tafelkonstruktion in sinngemäßer Uebertragung des von M. d'Ocagne gegebenen Weges folgendermaßen: Es wird gemäß (II') durch die einzelnen α-Werte einer sin-Hilfsleiter der Strahlenbüschel gezogen. Da ferner für $e = 0$, $\alpha = \mu$ ist, so ergibt der Schnittpunkt der Verbindungslinien von $e = 0$ mit dem Werte $\alpha = \mu$ bereits auf den Strahlen die α-Punkte. Die Kurve schlängelt sich in unendlich vielen Windungen gegen den Nullpunkt hin; es wurde jedoch in Abb. 19 bloß der Ast $0^0 - 180^0$ gezeichnet. (Vergl. das später Gesagte!)

[1]) M. d'Ocagne (1), S. 223. Fr. Schilling (1), S. 32.

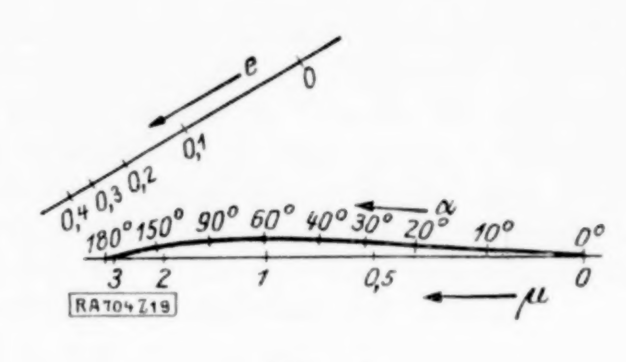


Abb. 19.

β) **Logarithmische Maßstäbe:** 1. Wahl: Setzt man mit $c = 1$, $a = b = 0$, $\xi = 1/y$, $\eta = x/y$, so ergibt sich

als Gl. d. A. G. $\mu + e\,x = y$ . . . . . (I),

als Gl. d. L. K. $x = \sin y = \sin \alpha$ . . . . (II),

da die B. nach $\alpha = y$ . . . . (III)

erfolgt. Die Konstruktion der Tafel ist sehr einfach: Die L. K. ist der geometrische Ort aus (II) und (III) (s. Abb. 20a). Dieselbe zeigt der Fall $e = 0{,}15$, $\mu = 0{,}5$, was $\alpha = 30^0$ im Schnitt mit dem Ast $++$ ergibt. Die Kurve hat, wie früher gesagt, unendlich viele Aeste, die abwechselnd das Zeichen $++$ und $-+$ tragen, von denen aber bloß der Ast $0^0 - 180^0$ gezeichnet ist. Die $-+$ Aeste entstehen aus negativem x, wenn $2\pi > \alpha > \pi$ ist; es ist dann (I) zu schreiben

$$y = -e(-x) + \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I').$$

2. **Wahl:** Mit $c = 1$, $a = b = 0$, $\xi = x/y$, $\eta = 1/y$ erhält man

als Gl. d. A. G. $y = e + \mu\,x$ . . . . (I),

als Gl. d. L. K. $y = x \operatorname{arc\,sin} 1/x$ . . . . (II),

deren B. nach $\alpha = \operatorname{arc\,sin} 1/x$ . . . . (III)

erfolgt. Die Abb. 20b zeigt die Lösung für den Fall $\mu = 1{,}90$, $e = 0{,}30$ was im Schnitt der beiden $++$ Aesten $\alpha = 120^0$ ergibt. Hier besteht die Kurve aus abwechselnden

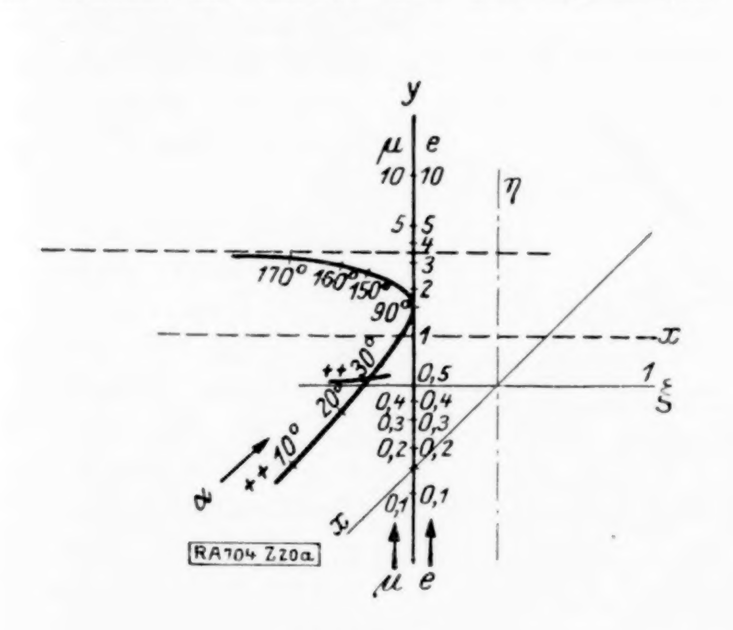


Abb. 20a.

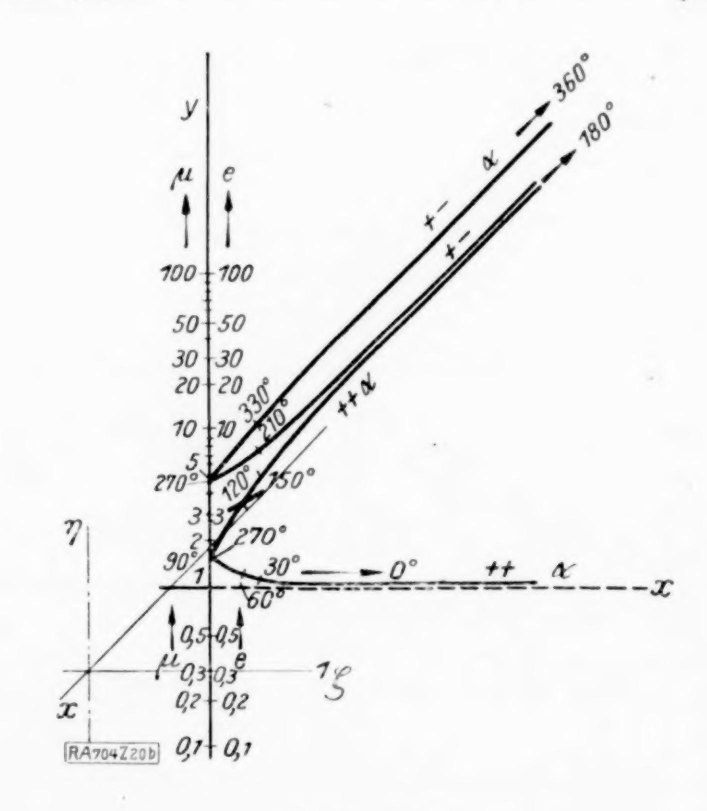


Abb. 20b.

$++$ und $+-$ Aesten; vom letzteren ist jener von $180^0 - 360^0$ gezeichnet. Es ist für $\alpha > \pi$, $x < 0$, $y < 0$, es geht daher (I) in $y = -e + \mu\,x$ (I″) für $2\pi > \alpha > \pi$ über.

γ) **Kreisförmige Ableselinie:** Da e nur von 0 bis 0,4 in Betracht kommt, werde $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 10$ gewählt, ferner $a = b = 0$, $c = 1$ gesetzt. Es ergibt sich

als Gl. d. A. K.

$$\mu \frac{2\,x}{x^2 + y^2} + e \frac{10\,y}{x^2 + y^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I),$$

als Gl. d. L. K.

$$y = {}^1/_5\, x \sin \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II),$$

deren B. aus

$$\alpha = \frac{x^2 + y^2}{2\,x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

hervorgeht. Hier ergibt der Kreis durch den Ursprung mit dem Mittelpunkte $\alpha = \mu$ auf den α-Strahlen den gesuchten Skalenpunkt α der lösenden Kurve. (In Abb. 21 durch den mit Pfeil versehenen Kreisbogen für $\alpha = 90^0$ angedeutet.) Da aus (III) folgt

$$x^{-1} = \frac{2\,\alpha}{1 + {}^1/_{25} \sin^2 \alpha}$$

und $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, so liegt auf dem Strahl α noch der Punkt für den Supplementwinkel, der ganz entsprechend (aus $\mu = \pi - \alpha$) erhalten wird. Wie leicht einzusehen, könnten die über π hinausgehenden Leiternwerte der sich in immer größeren Amplituden um die μ Achse schlängelnden Kurve bestimmt werden. Es werde aber davon abgesehen und der bisher noch nicht angewandte, von M. d'Ocagne zwecks Verkleinerung des Abbildungsraumes benutzte Kunstgriff besprochen, der dazu dient, den gezeichneten Ast auch für das Intervall 180° bis 360° benützen zu können.

Zieht man nämlich von beiden Seiten der vorgelegten Gleichung die Größe 2π ab

$$(\alpha - 2\pi) - e\sin\alpha = \mu - 2\pi$$

und setzt $\alpha - 2\pi = -A$, $\mu - 2\pi = -M$, so bleibt für die neuen Veränderlichen die Gleichungsform erhalten. Es sind aber, wie in Abb. 21 ausdrücklich bemerkt, die mit $\alpha = 2\pi - A$, $\mu = 2\pi - M$ bezifferten Unterseiten der Linien von den Oberseiten streng auseinanderzuhalten. Dieser Kunstgriff ist nur deshalb möglich, weil stets α und μ gleichzeitig größer oder kleiner sind als π, was aus der Gl. unmittelbar herausgelesen werden kann. Die Abb. 21 gibt $e = 0,1$, $\mu = 2$, den Wert $\alpha = 120°$.

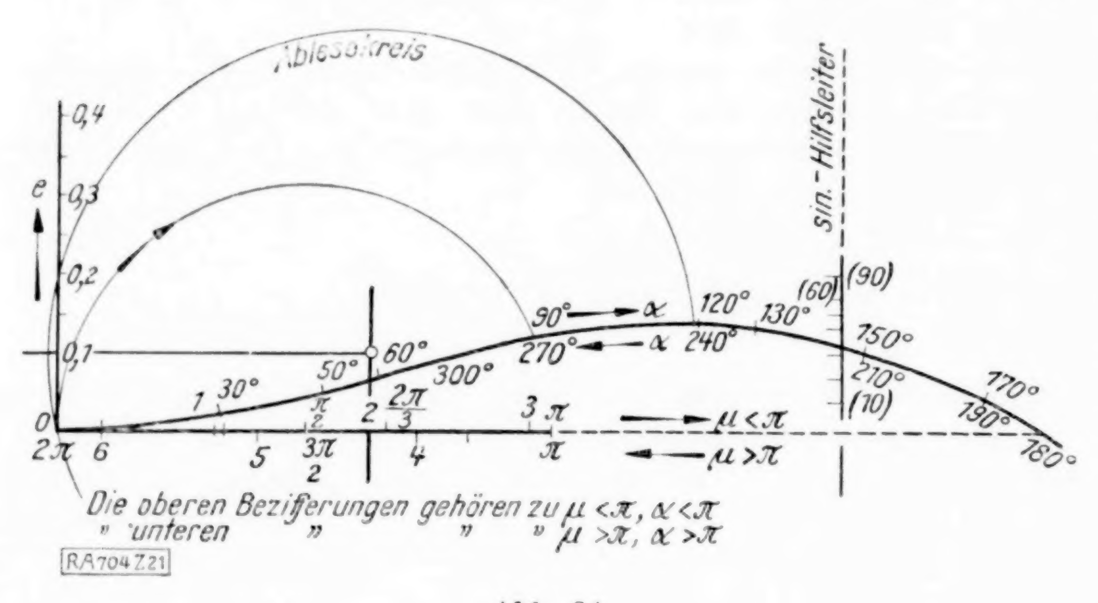


Abb. 21.

δ) Rechenschieber: Hier ergibt die Wahl $\xi = 1/x$, $\eta = y/x$ die Abb. 22. Die notwendigen Gleichungen (I) bis (III) entstehen aus denen von β) durch Vertauschung von x mit y. Das in den Abb. eingezeichnete Beispiel gibt für $\mu = 2$, $e = 0,4$ den Wert $\alpha = 132°$. Die sin-Hilfsleiter ist in den Abb. angedeutet. Die zweite Wahl ergäbe keine so günstige und rasch entwerfbare Tafel.

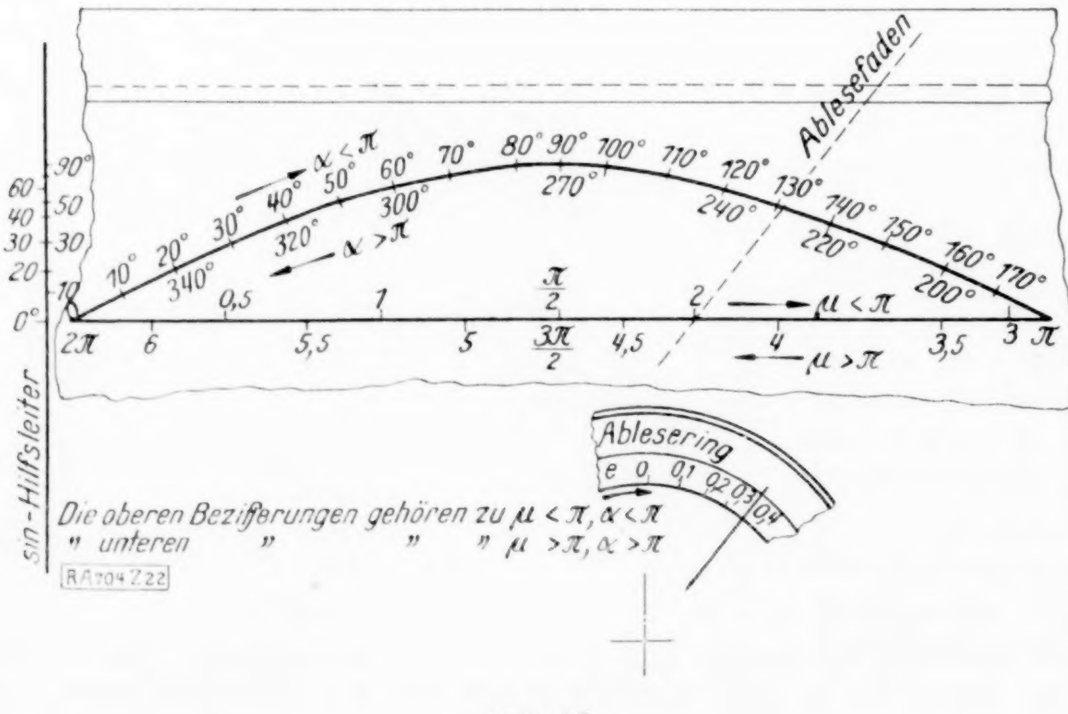


Abb. 22.

4. Fresnelsche Formeln für die Glasreflexion[1]). Sie lauten:

$$\text{a)}\ \frac{1+h}{1-h} = \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}, \qquad \text{b)}\ \frac{1+k}{1-k} = \frac{n^2 \cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Hierin ist n der Brechungsindex der durchsichtigen Oberfläche, i der Einfallswinkel, h^2 und k^2 die Fresnelschen Koeffizienten.

a) mit den abkürzenden Bezeichnungen $\left(\frac{1+h}{1-h}\right)^2 = \varphi$, $\cos^2 i = z$ ergibt sich:

$$\frac{1}{n^2-1}\,\frac{\varphi-1}{\varphi} + \frac{1}{z} = 0,$$

[1]) R. Soreau (1a), S. 229.

also eine, der kanonischen Form (II) zugehörige Gl. Mit $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $c = 1$ $a = -1$, $k_0 = 1$, $k_1 = k_2 = 0$ ergibt sich:

α) Gewöhnliche Maßstäbe.

als Gl. d. A. G. $\quad u/\varphi - v/z = 1$ . . . . (I),

als Gl. d. L. K. $\quad u = 1$ . . . . (II),

deren B. nach $\quad n = \sin i$ . . . . (III)

erfolgt.

β) Logarithmische Maßstäbe. Mit $u = 1/y$, $v = -x/y$ ist

die Gl. d. A. G. $\quad y = x/z + 1/\varphi$ . . . . (I),

die Gl. d. L. K. $\quad y = 1$ . . . . (II),

deren B. nach $\quad n^2 = 1 - x$ . . . . (III)

erfolgt. (Durch Einführung von $-x = X$ ergibt sich der Ast $-+$) (s. Abb. 23).

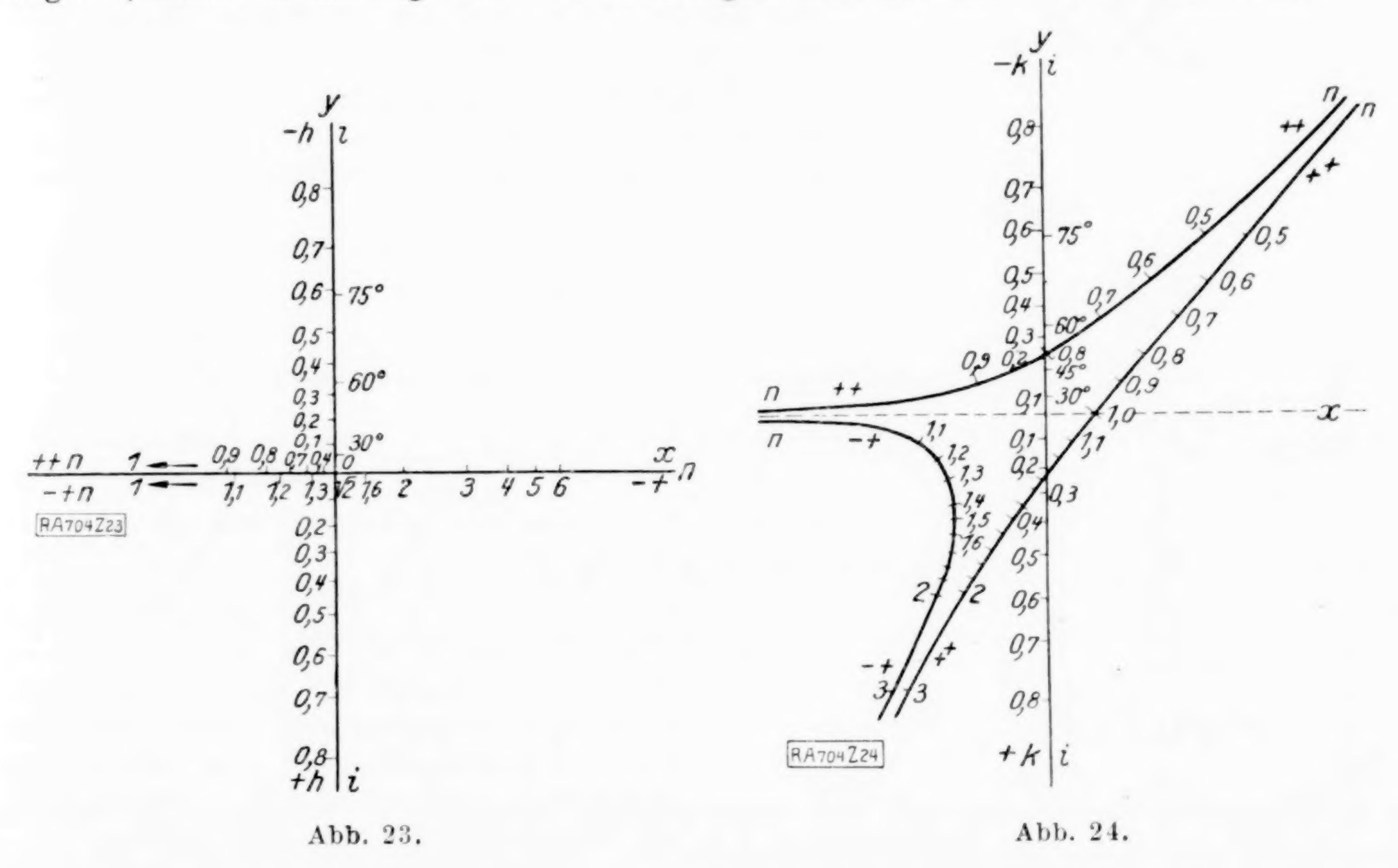


Abb. 23. Abb. 24.

b) Mit denselben Abkürzungen und einfachster Konstantenwahl ergibt sich:

α) Gewöhnliche Maßstäbe.

als Gl. d. A. G. $\quad u/\varphi - v/z = 1$ . . . . (I),

als Gl. d. L. K. $\quad u = (v + 1)^2$ . . . . (II),

deren B. erfolgt nach $\quad u = n^4$ . . . . (III).

β) Logarithmische Maßstäbe. Mit $u = 1/y$, $v = -x/y$ ist

die Gl. d. A. G. $\quad y = x/z + 1/\varphi$ . . . . (I),

die Gl. d. L. K. $\quad (y - x)^2 = y$ . . . . (II),

deren B. erfolgt nach $\quad n^4 = 1/y$ . . . . (III).

(S. Abb. 24.) Auch hier ist der Ast $-+$ durch Einführung von $-x = X$ in die Gl. (I) bis (III) entstanden.

5. Winkelverbesserung durch Entfernungsmessung beim mittelbaren Schießen.

In Band II gibt R. Soreau[1]) die Tafeln wieder, die von Ricci und J. Clark für diesen Zweck entworfen wurden. Die zugrundegelegte Gl. wird folgendermaßen hergeleitet: Eine Batterie schieße auf ein unsichtbares Ziel B (Abb. 25). Ein Beobachter C, der sich in der Entfernung AC — welche als Längeneinheit genommen werden möge — befindet, telephoniert dem Batteriekommandanten die Entfernung $CB = \varrho$ und den Winkel $XCB = \varphi$, unter dem er das Ziel

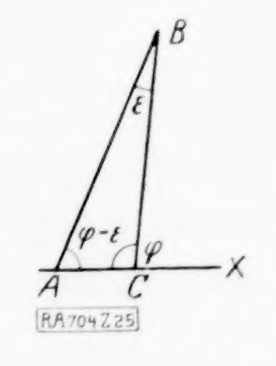


Abb. 25.

[1]) a. a. O., S. 112 u. ff.

beobachtet. Es handelt sich darum, daraus die Verbesserungen a und ε herzuleiten, die an ϱ und φ angebracht werden müssen, um die wahre Entfernung AB und wahre Richtung XAB zu erhalten. Die zu entwerfende Tafel betrifft die Winkelverbesserung ε. Aus dem Dreieck ABC folgt

$$\frac{\varrho}{\sin(\psi-\varepsilon)}=\frac{1}{\sin\varepsilon} \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\psi}{\operatorname{tg}\varepsilon}-(\cos\varphi+\varrho)=0.$$

α) Logarithmische Maßstäbe: Es ergibt die Division durch $\cos\varphi$

als Gl. d. A. G. $\quad y=x\operatorname{tg}\varepsilon-\varrho$ . . . . (I),

als Gl. d. L. K. $\quad x^2+y^2=1$ . . . . (II),

deren B. erfolgt nach $\quad x=\sin\varphi$ oder $y=\cos\varphi$ . . . . (III).

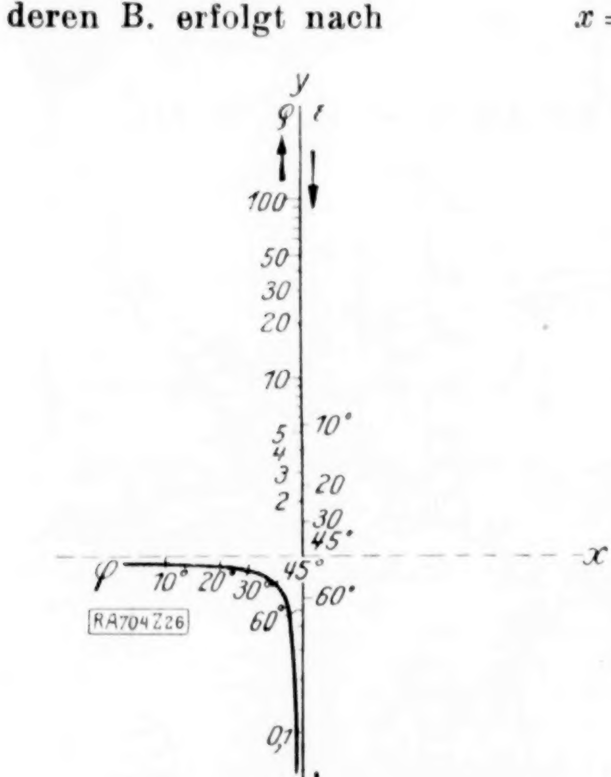
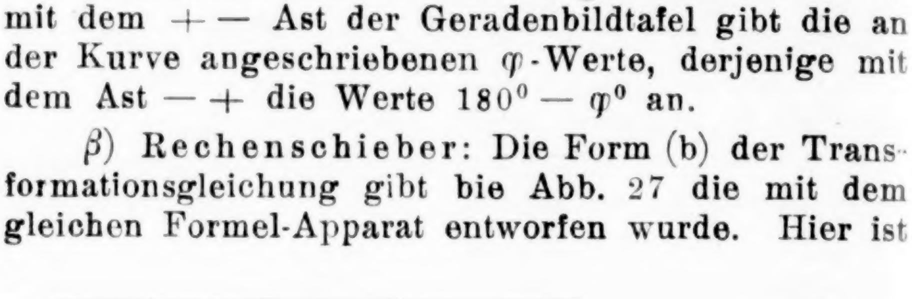


Abb. 26.


Der Schnitt der in Abb. 26 gezeichneten Kurve mit dem $+-$ Ast der Geradenbildtafel gibt die an der Kurve angeschriebenen φ-Werte, derjenige mit dem Ast $-+$ die Werte $180^0-\varphi^0$ an.

β) Rechenschieber: Die Form (b) der Transformationsgleichung gibt bie Abb. 27 die mit dem gleichen Formel-Apparat entworfen wurde. Hier ist

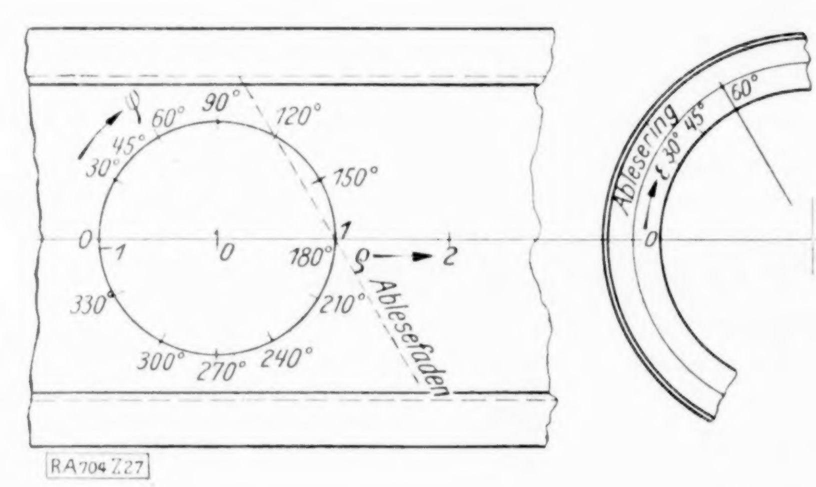


Abb. 27.

die L. K., sowie der Läufer mit der regelmäßigen Kreisteilung versehen, so daß die Konstruktion der Schieber die allereinfachste ist. Das gewählte Beispiel gibt für $\varrho=1$, $\varphi=120^0$ den Wert $\varepsilon=60^0$.

Die Tafel kann auch statt jener, die die Einzeichnung der Radschaufeln des Sagebien-Wasserrades behandelt[1]), verwendet werden, worauf aber nicht weiter eingegangen werden kann.

6. Als Beispiel für die **vierte kanonische Form** werde das dem soeben behandelten entsprechende unmittelbare Schießen mit Entfernungsmessung[2]) gewählt. Es schieße eine Batterie A auf ein Ziel B, das von A aus sichtbar ist, und dessen Entfernung CB von einem Entfernungsmesser beobachtet wird, der sich in einem durch ω und $AC=1$ festgelegten Punkt C befindet. Es sei $CB=\varrho$, $AB=\varrho+a$. Es ist die Verbesserung a zu bestimmen, die zu ϱ hinzuzufügen ist, um die Entfernung AB zu erhalten. Das Dreieck ABC gibt $-\varrho\cos a+(\varrho-\cos\omega)\,a+\frac{1+a^2}{2}=0$.

Es ist mit $f_1=\varrho$, $f_2=-\cos\omega$, $x=\frac{2a}{1+a^2}$, $y=\frac{2}{1+a^2}$, $M=\varrho-\cos\omega$, $N=-\varrho\cos\omega$.

α) Gewöhnliche Maßstäbe:

die Gl. d. A. G. $\quad Mx+Ny+1=0$ . . . . (I),

die Gl. d. L. K. $\quad x^2+(y-1)^2=1$ . . . . (II),

deren B. erfolgt nach $\quad a=\pm\sqrt{2/y-1}$ . . . . (III).

[1]) R. Soreau (1a), S. 228 (abaque 46).
[2]) R. Soreau (1a), S. 213 (abaque 41).

Die B. der Ersatzdoppelparabel $x^2 = y$ erfolgt nach:

$$\varrho = -1/x \text{ und } \cos\omega = 1/x \quad \text{(s. Abb. 29).}$$

Eine vielleicht günstigere Anordnung ergibt sich durch Division der Gl. durch $f_1 f_2 f_3$ [s. Abb. 30, die im wesentlichen mit Abb. 203 von R. Soreau (1b)[1]) übereinstimmt].

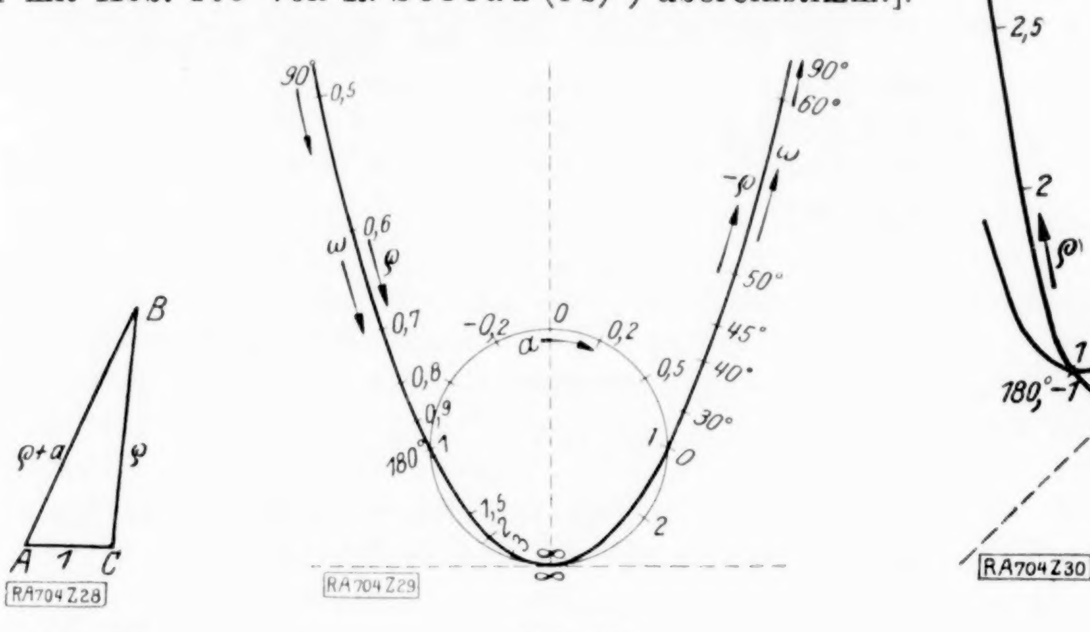


Abb. 28. Abb. 29. Abb. 30.

β) Rechenschieber: Die Transformationsgleichung (a) gibt für die 1. Wahl:

als Gl. d. L. K. $\qquad y^2 - 2xy + 1 = 0$ . . . . (I),

deren B. erfolgt nach $\qquad a = 1/y$ . . . . (III).

Die B. der Ersatzdoppelhyperbel erfolgt nach:

$$x = -\varrho,\ x = \cos\omega \quad \text{(s. Abb. 31)} \quad \text{. . . . . (I).}$$

Es ergibt sich für $\varrho = 1$, $\omega = 60^0$ der Wert $a = 0$, $a = -1$, so daß damit die eine Asymptotenrichtung der Hyperbel der L. K. angegeben wird. Die andere Asymptote ist symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten. Wie in der Abb. angegeben, ist der zweite Teil des Hyperbelastes unbrauchbar.

Die 2. Wahl ergibt

als Gl. d. L. K. $\quad x^2 - xy + {}^1/_2 = 0$

deren B. erfolgt nach $\quad x = 1/a$.

Die B. der Ersatzdoppelhyperbel erfolgt nach:

$$x = \frac{-1}{\varrho},\ x = \frac{1}{\cos\omega} \quad . . . \ \text{(I).}$$

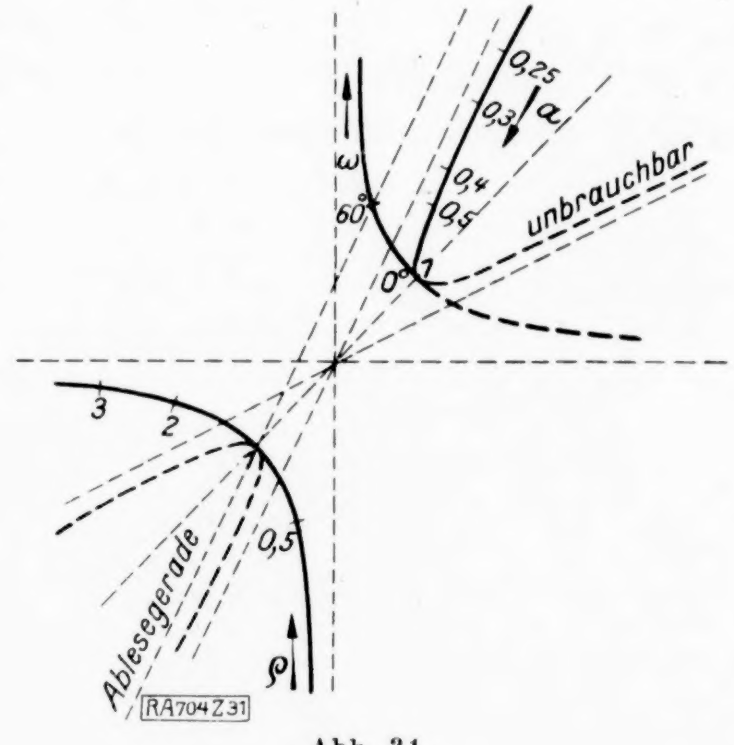


Abb. 31.

Wie ersichtlich, kommt man bei dieser kanonischen Form zu einer Schieberform, bei der der Läufer unkotiert ist; er ist daher in der Abbildung weggelassen. Seine Anwendung ergäbe — obwohl sie prinzipiell möglich ist — praktisch gewisse Unzukömmlichkeiten, da seine Einstellung nur durch ein gewisses Tatonnieren möglich wäre.

Als Beispiel für die Darstellung der kanonischen Form II durch ein Parabelnomogramm werde das dort gewählte[2]) wieder behandelt:

$$m = \sqrt{\frac{R+p}{R-p}} - 1 \qquad \text{oder} \qquad -\frac{p}{R}\,\frac{(1+m)^2+1}{(1+m)^2-1} + 1 = 0.$$

[1]) a. a. O., S. 125.

[2]) M. d'Ocagne (1), S. 235.

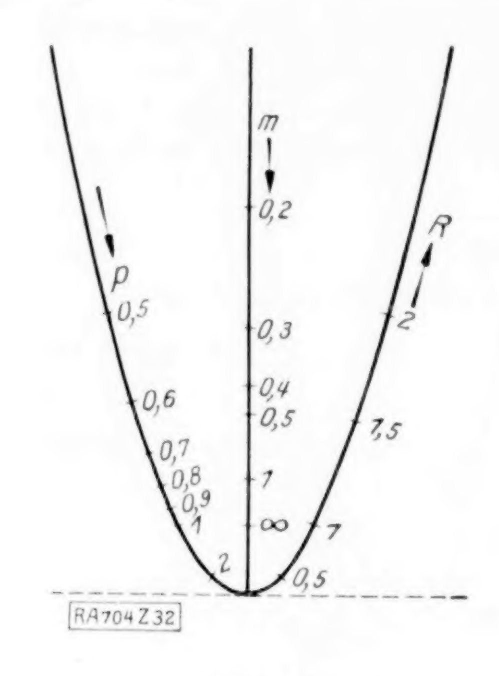


Abb. 32.

Es ist

$$p = f_1\,, \quad -\frac{1}{R} = f_2\,, \quad y = \frac{(1+m)^2+1}{(1+m)^2-1}\,, \quad x = 0.$$

Die B. der Ersatzdoppelparabel erfolgt nach $x = -1/p$, $x = R$ (Abb. 32).

7. Als Beispiel für die **fünfte kanonische Form** diene das von R. Soreau[1]) behandelte für die **Ausflußgeschwindigkeit des Wassers durch eine rechteckige Mündung in einer vertikalen Wand.** Sie erfolgt nach der Formel

$$v = \frac{2\sqrt{2\,g}}{3}\,\frac{h_1^{3/2} - h_2^{3/2}}{h_1 - h_2}\,,$$

wenn zwei Seiten des Rechtecks horizontal sind, ihre Entfernung vom Wasserspiegel h_1 und h_2 (in m) beträgt und v in m/s gemessen wird: $\left(\frac{2\sqrt{2\,g}}{3} = 0{,}338\right)$.

Diese Gl. hat die Eigentümlichkeit, daß die Funktionen f_1 und f_2, ebenso g_1 und g_2 die gleichen sind und der Unterschied nur in den Argumenten liegt.

α) Gewöhnliche Maßstäbe: Es ist $f_1 = h_1^{3/2}$, $g_1 = h_1$, $f_2 = -h_2^{3/2}$, $g_2 = -h_2$, $g_3 = 0{,}338\,v$.

Die Gl. d. A. G. ist $\quad M x + 0{,}338\,v\,y + 1 = 0$ . . . . (I),

die Gl. d. L. K. ist $\quad y^3 = -x$ . . . . (II),

ihre B. erfolgt nach $\quad x = h_1^{3/2}$ oder $y = -h_1^{-1/2}$ . . . . (III),

die Gl. d. Ersatzkurve μ $\quad y^3 = -x$,

ihre B. erfolgt nach $\quad x = +h_2^{3/2}$ oder $y = -h_1^{-1/2}$ (s. Abb. 33).

β) Rechenschieber: 1. Wahl: Hier ist

die Gl. d. L. K. $\quad x^2 = -y^3$,

die Gl. d. Ersatzkurve μ $\quad x^2 = -y^3$,

deren B. erfolgte nach einer der Gl.

$$-x = h_1^{3/2}\,, \quad -y = h_1 \quad \text{bzw.} \quad -x = h_2^{3/2}\,, \quad -y = h_2.$$

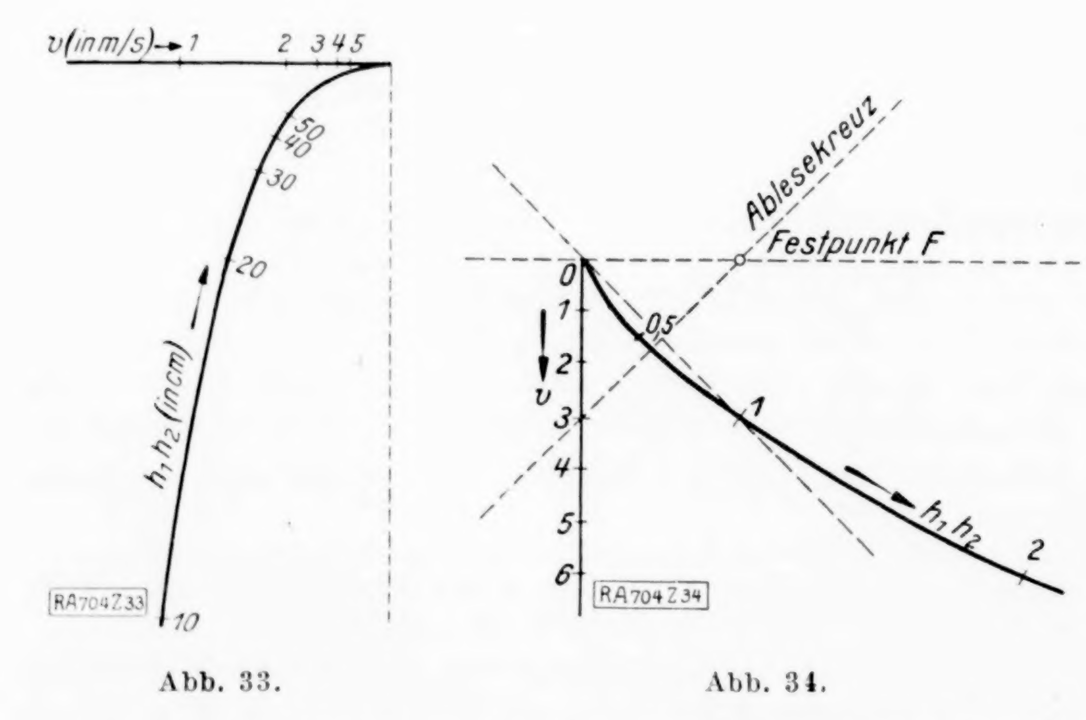


Abb. 33. Abb. 34.

Die B. auf dem hier ebenfalls nicht praktischen und daher nicht eingezeichneten Läufer ergäbe sich zu $\frac{1}{0{,}338\,v}$; wird aber der Mittelpunkt des Läufers auf die X-Achse in den Abstand -1 vom Ursprung verlegt, so sieht man, daß der untere Teil der Y-Achse die $0{,}338\,v$-Leiter trägt. Es ist dann F der Festpunkt, durch den das rechtwinklige Zweiachsenkreuz stets hindurchzugehen hat. In Abbild. 34 ist $h_1 = 1$, $h_2 = 0$; es ergibt sich $v \sim 3$ m/s. — R. Soreau (1a)[2]) gibt in (ab. 78) eine projektiv veränderte Tafel. — Die reziproke Form der vorgelegten Gl. ergäbe eine ähnliche Tafel.

[1]) R. Soreau (1a). S. 225, (ab. 45).
[2]) a. a. O. S. 358.

Die zweite Wahl gibt die bereits bekannten Ergebnisse und zwar für die reziproke Form den von R. Soreau (1a) gegebenen abaque 45[1]).

8. Allgemeine Gleichungsformen. a) Strahlentafeln Die von H. Schwerdt (1) als Beispiele für diese Tafeln gewählten Multiplikationstafeln $\gamma = \alpha\,\beta$ — die auch geschrieben werden können $\lambda\,\gamma^n = \lambda\,\alpha^n\,\beta^n$, wobei λ ein Maßstabfaktor und n ein sogenannter freier Parameter ist, der sich aus dem Bereich der Tafel ergibt — gehen durch besondere Bedingungsgleichungen hervor.

Wird $\lambda\,\beta^n = v/u$ gesetzt, so erhält man zunächst $\lambda\,\gamma^n\,u = \alpha^n\,v$. Schreibt man vor $u = \alpha^n$, so ergibt sich $v = \lambda\,\gamma^n$. Tafeln dieser Art bezeichnet H. Schwerdt nach Chenevier, der $n = 1$ wählte.

Wird in $1/\lambda\,\gamma^n = 1/\lambda\,\alpha^n\,\beta^n$ gesetzt $1/\lambda\,\gamma^n = u/v$, so ergibt sich zunächst $u = 1/\lambda\,\alpha^n\,\beta^n\,v$. Schreibt man vor $u = \alpha^n$, so erhält man $v = \lambda\,\beta^{-n}$, welche Tafeln von Crépin ($n = 1$) und Fürle ($n = {}^1/_2$) eingeführt wurden. Abbildungen dieser Tafeln sind in dem Buch von H. Schwerdt zu finden[2]).

b) Doppelstrahlentafeln und verallgemeinerte Doppelstrahlentafeln. Es möge das von M. d'Ocagne (1)[3]) und R. Soreau (1a)[4]) gewählte Beispiel der Tafeln für Stützmauern für Erdmassen, die nach ihrer natürlichen Böschung abfallen, gewählt werden. Es gelangt dabei folgende Formel zur Anwendung

$$K^2 + K\,p\sin\varphi\cos\varphi - p/3\cos^2\varphi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a).$$

Hierin bedeutet K das Verhältnis der Grundlinie zur Höhe einer Mauer von rechteckigem Querschnitt, die eine unter dem Böschungswinkel φ abfallende Erdmasse stützt, während p das Verhältnis der spezifischen Gewichte der Erdmasse und des Mauerwerks angibt.

1. α) Führt man $K = u/v$ ein, so ergibt sich

$$u^2 + u\,v\,p\sin\varphi\cos\varphi - p/3\,v^2\cos^2\varphi = 0.$$

Schreibt man vor $\quad u + p\,v\sin\varphi\cos\varphi = p,\quad$ so lautet

die Gl. d. A. G. $\quad u/p + v\sin\varphi\cos\varphi = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad$ (I),

die Gl. d. L. K. $\quad u = v^2/3\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad$ (II),

deren B. nach $\quad u = K\,v \quad \ldots\ldots\ldots \quad$ (III)

erfolgt. Die Tafel hat also für die Veränderliche φ ein »überzähliges System«.

β) Man kann aber auch die Veränderlichen trennen, indem man vorschreibt:

$u\cos\varphi\sin\varphi - v/3\cos^2\varphi = -1.$

Dann ist

die Gl. d. A. G.

$$-u\cos\varphi\sin\varphi + v\frac{\cos^2\varphi}{3} = 1 \,. \quad \text{(I)},$$

die Gl. d. L. K. $\quad u_1 = p\,v \quad \ldots\ldots \quad$ (II),

ihre B. erfolgt nach $\quad u = K\,v \quad \ldots\ldots \quad$ (III).

Die Schar der A. G. kann, da nur von einem Parameter abhängig, in die Tafel eingezeichnet werden; es ist diese also eine Strahlentafel (Abb. 35) Im logarithmischen System besteht das Grundblatt aus zwei Systemen paralleler Geraden, während die Geradenbildtafel jeweils in bekannter Weise einzustellen ist.

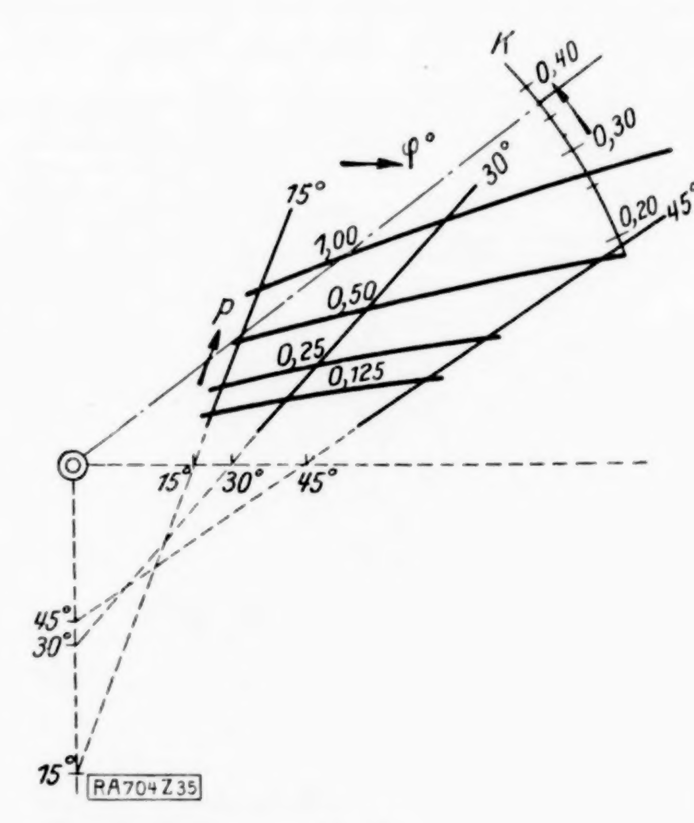


Abb. 35.

2. Geht man hingegen von der identischen Form

$$K^2\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\varphi) + K\,p\,\mathrm{tg}\,\varphi - p/3 = 0$$

aus und führt hier $\mathrm{tg}\,\varphi = u/v$ ein, so erhält man vorerst:

$$K^2\,\frac{u^2 + v^2}{v^2} + K\,p\,\frac{u}{v} - \frac{p}{3} = 0.$$

---

1) a. a. O. S. 226.

2) Vergl. auch M. d'Ocagne (1), S. 45, 58.

3) S. 111. Siehe auch Fr. Schilling (1), S. 22.

4) R. Soreau (1a): abaques 18, 19, 20, 80, 81, 82,

Durch verschiedene Bedingungsgl. erhält man die bekannten Ergebnisse R. Soreaus bzw. M. d'Ocagnes:

$v = K$ (abaque 18), $v = 3\,K(u + 1)$ (abaque 19), $u^2 + v^2 = p\,v$ (abaque 20).

In allen 3 Fällen entstehen Strahlentafeln, die eine Schar Kreise und zwei Scharen Geraden enthalten. Schließlich erhält man mit $u^2 + v^2 = p$ eine Strahlentafel mit 1 Schar Hyperbeln und 1 Schar Kreise, die aber in parallele Geraden überführt werden können.

c) Netztafeln mit 2 Kreisscharen. Aus der Form 1 β) des vorhergehenden Punktes b) erhält man mit $u = \frac{2\,x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{2\,y}{x^2 + y^2}$

als Gl. d. A. K. $$\frac{2\,x}{x^2 + y^2} \cos\varphi \sin\varphi - \frac{2\,y}{3\,(x^2 + y^2)} \cos^2\varphi = -1 \quad \ldots \ldots \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L. K. $$x^2 = \frac{p\,y^3}{2 - p\,y} \quad \ldots \ldots \quad \text{(II)},$$

deren B. durch $$x = K\,y \quad \ldots \ldots \quad \text{(III)}$$

erfolgt. Der Ort der Mittelpunkte der Ablesekreise ist die feste Kurve mit den Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= -\cos\varphi \sin\varphi \\ y &= {}^1/_3 \cos^2\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad \text{(I')},$$

also nach Elimination von φ die Ellipse von der Gl.

$$4\,x^2 + 36\,(y - {}^1/_6)^2 = 1 \quad \ldots \ldots \quad \text{(I'')},$$

die nach einer der Gl. (I') nach φ zu beziffern wäre.

Aus der Form 2 α) (abaque 18) erhält man hingegen mit $u = \frac{2\,x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{2\,y}{x^2 + y^2}$ (s. Abb. 36)

als Gl. d. Kreissysteme $\frac{2\,y}{x^2 + y^2} = K$, $(x - 3)^2 + y^2 = 9 + \frac{12}{p}$,

als Gl. d. Geradenschar $y \operatorname{tg} \varphi = x$.

d) Netztafel mit 3 Kreisscharen: Hierfür werde die von R. Soreau (1 b)[1]) für diesen Fall gegebene Gleichung $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

ebenfalls vertafelt. Es ergeben sich die 3 Kreisscharen:

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = 2\,a^4, \quad \frac{2\,x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{b^4}, \quad \frac{2\,y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{a^2} \quad \text{(s. Abb. 37)}.$$

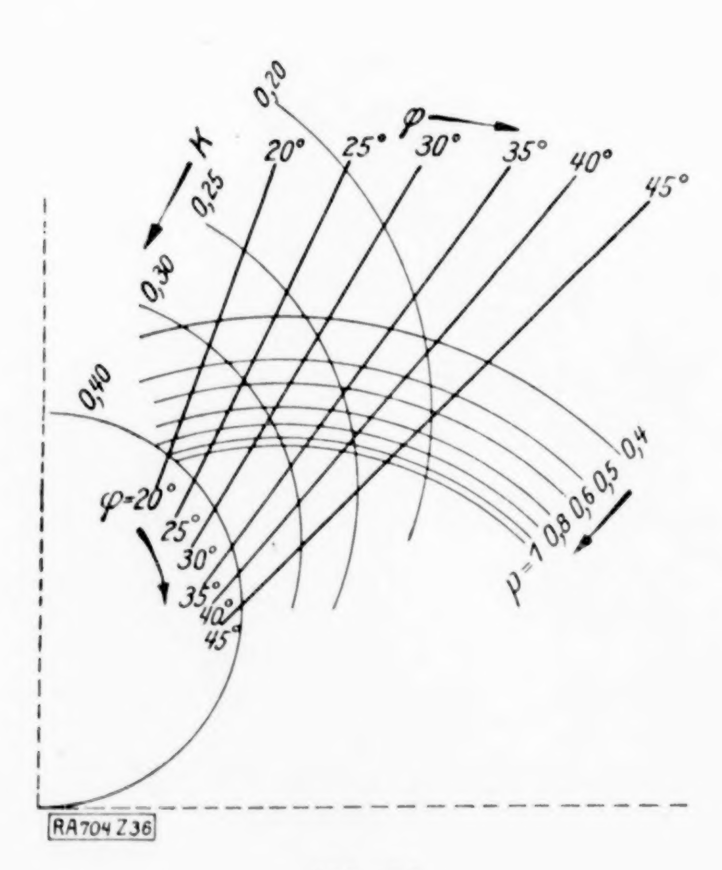




Abb. 36.

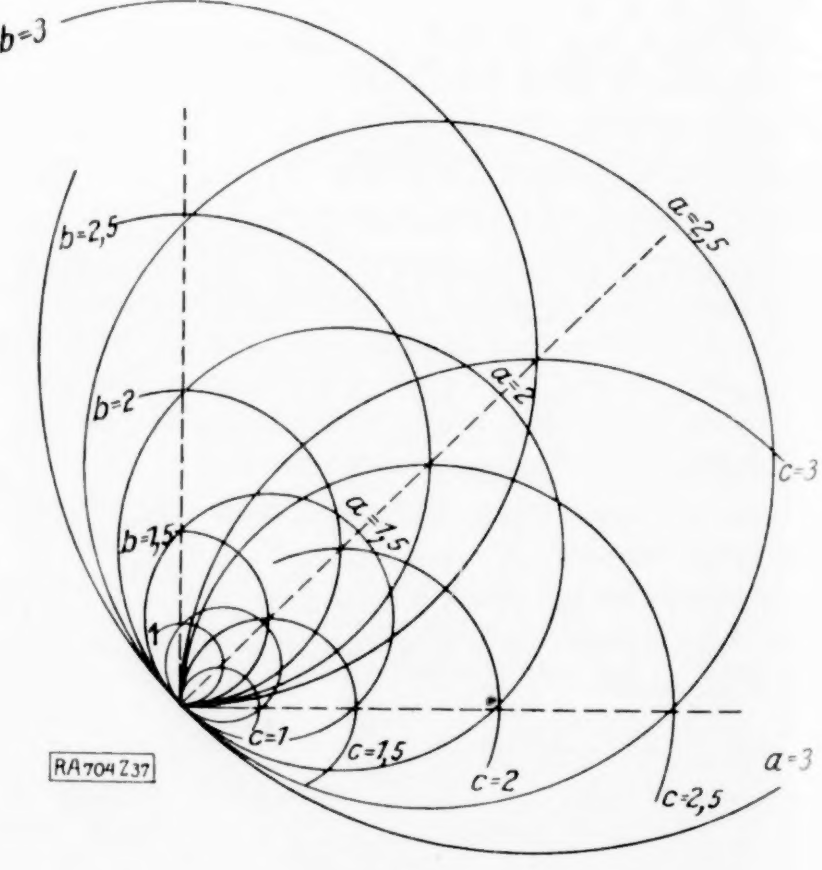


Abb. 37.

[1]) a. a. O. S. 19.

e) **Rechenschieber für die Formel des Board of Trade für zweireihige Zickzacknietung**[1]:

$$e = \sqrt{\frac{(11\,p + 4\,d)\,(p + 4\,d)}{10}}.$$

Hierin ist d der Durchmesser des Niets, p der Abstand zweier Nieten, e der Abstand der Nietreihen. Ausgeschrieben lautet diese Gl.

$$10\,e^2 = 11\,p^2 + 48\,p\,d + 16\,d^2.$$

Wird gesetzt $d = u/v$, so erhält man zunächst

$$16\,u^2 + 48\,u\,v\,p + 11\,p^2\,v^2 = 10\,e^2\,v^2.$$

Schreibt man vor

$$10\,e^2\,v - 48\,u\,p = 1\,,$$

so folgt weiter

$$16\,u^2 + 11\,p^2\,v^2 = v.$$

Wird nun gesetzt $u = \frac{y}{4\,x}$, $v = \frac{1}{x\,\sqrt{11}}$, so erhält man

als Gl. d. A. F.

$$10\,e^2\,\frac{1}{x\,\sqrt{11}} - 12\,p\,\frac{y}{x} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I}),$$

als Gl. d. L. K.

$$y^2 = \frac{1}{\sqrt{11}}\,(x - \sqrt{11}\,p^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II}),$$

deren B. erfolgt nach

$$d = \frac{\sqrt{11}}{4}\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{III}).$$

Es ist leicht ersichtlich, daß auch die allgemeine Form

$$\varepsilon\, f_3{}^2 = a_{11}\, f_1{}^2 + 2\, a_{22}\, f_1\, f_2 + a_{22}\, f_2{}^2 \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

vermöge der in (II) ausgedrückten Besonderheit — die Gl. (II) stellt eine Schar paralleler, nach y bezifferter Parabeln dar — die Konstruktion von Schiebern gestattet, die ein Grundblatt (»Stab«), ein verschiebbares durchsichtiges »Zungenblatt«, sowie den für alle diese Tafeln charakteristischen Läufer besitzen (s. Abb. 38).

Auf dem Stab ist — in der Ausnehmung — die e-Leiter aufgetragen, sowie ferner eine p-Leiter. Auf dem Zungenblatt befindet sich die durch (II) bestimmte Parabel mit der d-Leiter [nach (III)], sowie eine Einstellmarke für p. Der Läufer trägt ebenfalls eine p-Leiter. Die Ablesung für e als gesuchte Größe gestaltet sich folgendermaßen: Das Zungenblatt wird zunächst mittels der Einstellmarke auf den p-Wert eingestellt: dann wird der auf den p-Wert eingestellte Ablesefaden des Läufers durch den Punkt d auf dem Zungenblatt hindurchgeführt. Sein Schnitt mit der e-Leiter gibt den gesuchten Wert e. (Abbild. 38 zeigt den Fall $p = 50$, $d = 40$; es ergibt sich $e = 123$.) In der Abbildung ist die Einstellmarke des Zungenblattes bereits in $p = 50$ fixiert; der Ursprung des Koordinatensystems 0 ist links unten in der Ecke angegeben[2]).

Erläuterung: Auf Stab: p-Skala. – Auf Zungenblatt: Parabel mit d-Skala; Einstellmarke für p. – Auf Läufer: p-Skala

Abb. 38.

[1]) Siehe W. Kretschmer (1), diese Zeitschr., Bd. 5 (1925), S. 182, daselbst auch weitere Literatur. Vergl. auch P. Luckey (3).

[2]) Verlegt man die p-, bzw. e-Leiter auf die obere, bzw. untere Gleitfläche zwischen Stab und Zunge, so kann letztere auch aus undurchsichtigem Stoff sein.

9. Beziehungen zwischen mehr als drei Veränderlichen. Doppelte Fluchten.

α) Rechenschieber für die Form $f_1 + f_2 = f_3 + f_4$. Als Beispiel ist in Abb. 39 die Gl. $1/D = 1/A + 1/B + 1/C$ vertafelt. Mit $1/A + 1/B = 1/D - 1/C = 1/\xi$ ergibt sich diese gemäß Abb. 8. In der Abb. 39 ist $A = 4$, $B = 2$, $C = 4$, $D = 1$.

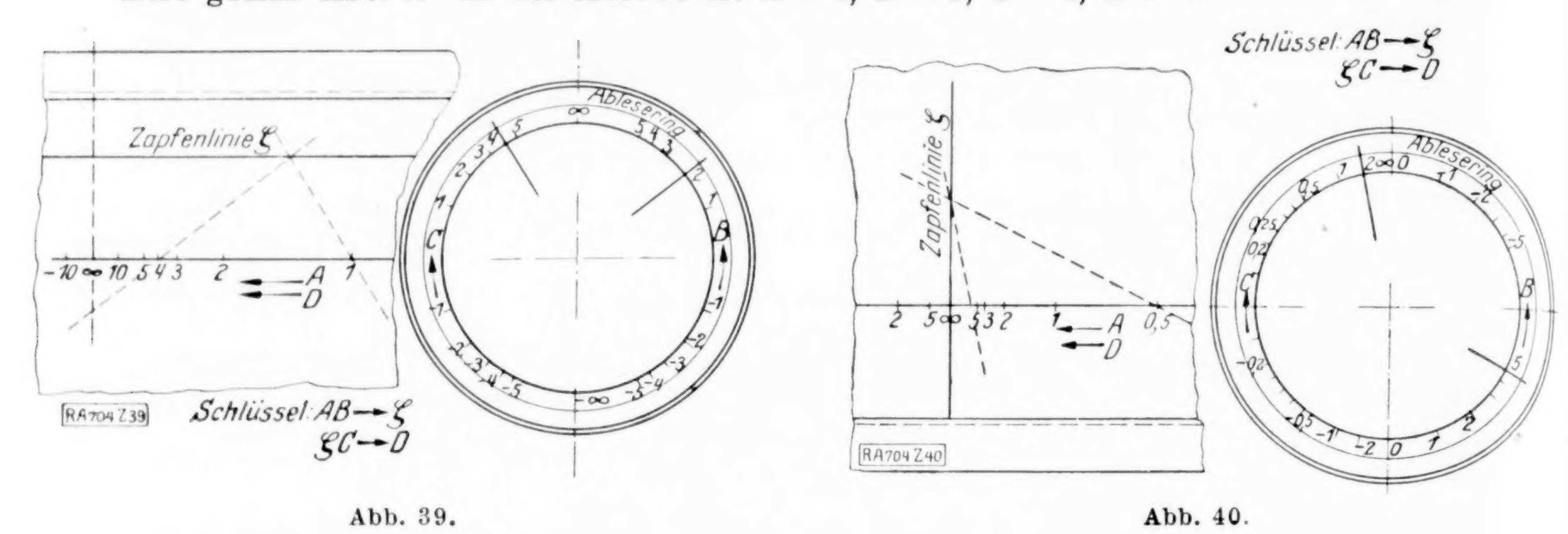


Abb. 39. Abb. 40.

β) Rechenschieber für die Form $f_1 f_2 = f_3 f_4$. Als Beispiel ist in Abb. 40 die Multiplikationstafel $ABC = D$ wiedergegeben. Sie ergibt sich durch Uebereinanderlagerung aus Abb. 11. Hier ist $A = 0{,}5$, $B = 5$, $C = 2$, $D = 5$.

Als weiteres, unter diese Formen fallendes Anwendungsbeispiel könnten Tafeln statt der von G. Eiffel erdachten Tafeln mit logarithmischen Vektoren für die Wahl einer Luftschraube[1]) entworfen werden. Es wäre hierzu bloß eine leicht ersichtliche Umformung der gegebenen Gleichung erforderlich.

γ) Kanonische Form $f_1 g_2 + f_2 = f_3 g_4 + f_4$.

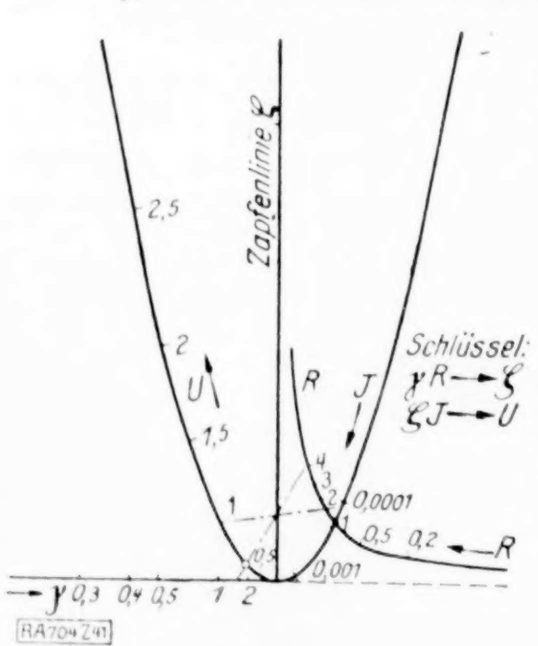


Abb. 41.

Gewöhnliche Maßstäbe: Es werde bloß die von M. d'Ocagne (1)[2]) behandelte Darstellung der Bazinschen Formel

$$U = \frac{87\sqrt{RJ}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

besprochen. Hierin bedeutet U die mittlere Geschwindigkeit in m/s, R den mittleren Radius in m, J die Neigung des Kanals und γ einen von der Natur der Seitenwand abhängigen Koeffizienten, der zwischen 0,06 und 1,75 schwankt. Die Formel kann durch Einführung einer Hilfsveränderlichen ξ in die beiden Teilsysteme

$$\frac{\gamma}{R} + \frac{1}{\sqrt{R}} + \zeta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$87\sqrt{J} + U\zeta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

zerfällt werden (siehe Abb. 41).

Rechenschieber für das gleiche Beispiel: 1. **Wahl:** $\xi = 1/x$, $\eta = y/x$.

1. System:

Gl. d. A. F. $\quad \gamma\, 1/x + \zeta\, y/x = 1 \quad \ldots\ldots \quad$ (I),

Gl. d. L. K. $\quad y = x^2 \quad \ldots\ldots \quad$ (II),

deren B. erfolgt nach $\quad x = -\sqrt{R} \quad \ldots\ldots \quad$ (III).

---

[1]) S. R. Soreau (1b), S. 188.

[2]) M. d'Ocagne (1), S. 280. — R. Soreau (1a), S. 307 (abaque 62).

2. System:

Gl. d. A. F. $\left(\frac{U}{87}+1\right)\frac{1}{x}+\sqrt{J}\,\frac{y}{x}=1$ . . . . (I),

Gl. d. L. K. $x=1$ . . . . (II),

deren B. erfolgt nach $\zeta=1/y$ . . . . (III).

(Siehe Abb. 42.) Hierzu ist zu bemerken: Will man mit dem gewöhnlichen Läufer das Auslangen finden, so ist zunächst die Fadenstellung durch die Richtung $\gamma\ R$ festzulegen. Eine Verschiebung in den Ursprung 0 ergäbe auf der Zapfenlinie den Wert ζ; Einstellung des Fadens auf J und Hindurchführung desselben durch ζ ergibt auf der U-Seite den gesuchten Wert U. Wie aus der Abb. 42 ersichtlich, kann durch die Anbringung von Fadenparallelen am Läuferglas die Ablesung auch ohne Verschiebung nach 0 geschehen, bzw. geht der Läuferfaden in Stellung (II) stets durch den Punkt $U=1$ und zeigt die Parallele zu ihm durch den ζ-Wert den Wert U auf der U-Leiter an. Es liegt also in diesem Fall der »Parallelenindex mit Festpunkt« vor.

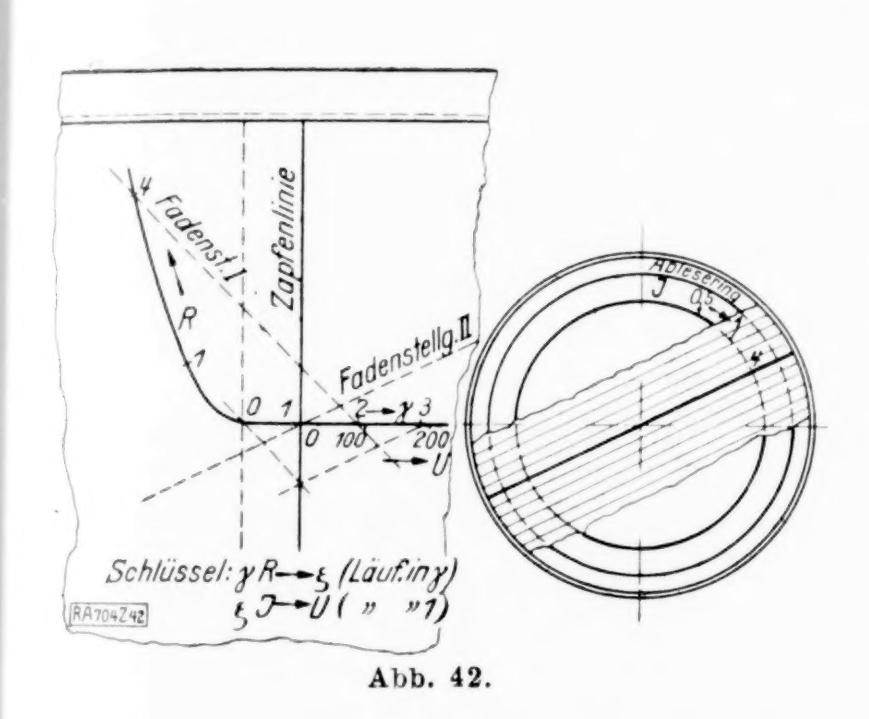


Abb. 42.

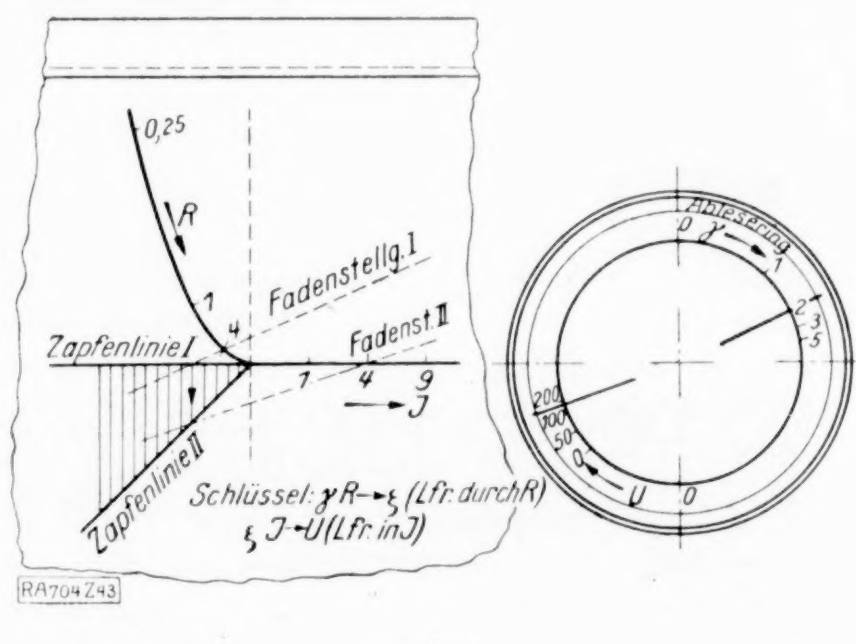


Abb. 43.

2. Wahl: $\xi=J/x$, $\eta=1/x$. 1. System:

Gl. d. A. F. $\xi/x+\gamma\,y/x=1$ . . . . (I),

Gl. d. L. K. $y=x^2$ . . . . (II),

deren B. folgt nach $\sqrt{R}=-1/x$ . . . . (III).

2. System:

Gl. d. A. F. $\frac{\sqrt{J}}{x}+\left(\frac{U}{87}+1\right)\frac{y}{x}=1$ . . . . (1),

Gl. d. L. K. $y=x$ . . . . (II),

deren B. erfolgt nach $\zeta=x=y$ . . . . (III).

Aus Abb. 43 ist zu ersehen, daß zwei Zapfenlinien erforderlich sind, zwischen denen die Parallelen zur y-Achse die Verbindung herstellen. Es ist der Faden auf γ einzustellen und durch den R-Wert hindurchzuführen, was auf den Zapfenlinien den Wert ζ gibt. Hierauf ist der Läufermittelpunkt auf den J-Wert einzustellen und der Faden auf den Zapfenwert ζ zu drehen. Er ergibt auf der U-Skala des Läufers den gesuchten U-Wert.

δ) Kanonische Form $\frac{f_1\,g_2+h_2}{f_1\,f_2+g_2}=\frac{f_3\,g_4+h_4}{f_3\,f_4+g_4}$.

Als Beispiel diene die Tafel für die Wassergeschwindigkeit in einem Kanal mit Trapezquerschnitt, für welchen Fall M. d'Ocagne (1)[1]) eine von Wolff konstruierte Tafel wiedergibt. In der Gl.

$$\frac{b\,d+d^2}{b+\sqrt{8}\,d}=\left(\frac{V}{40}\right)^{3/2}\frac{1}{S^{3/4}}$$

[1]) M. d'Ocagne (1), S. 287.

ist V die Geschwindigkeit in m/s in einem solchen Kanal von der Seitenneigung $^1/_1$, der Bodenbreite b in m, der Spiegelhöhe h in m und der Kanalneigung s.

Werden beide Seiten der Größe ξ/m gleichgesetzt, wobei sich $m = \sqrt{8}$ sofort ergibt, so entstehen die Teilsysteme

$$m(b\,d + d^2) = b\,\xi + \sqrt{8}\,\xi\,d \quad . \;.\;. \quad (1), \qquad m\left(\frac{V}{40}\right)^{3/2} \frac{1}{s^{3/4}} = \xi \quad . \;.\;.\;.\;.\;. \quad (2).$$

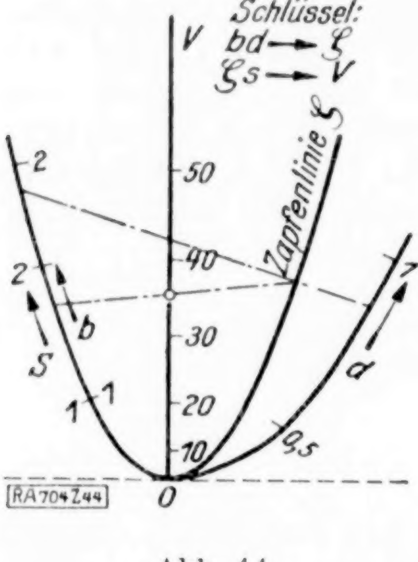


Abb. 44.

Die Behandlung des Systems (1) führt nach Division durch $-b\,\xi$ zu

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\xi}\right) d\sqrt{8} - \frac{1}{b\,\xi}\sqrt{8}\,d^2 + 1 = 0.$$

Mit $x = d\sqrt{8}$, $y = d^2\sqrt{8}$ ergibt sich die Parabel $x^2 = \sqrt{8}\,y$ als L. K., deren B. nach einer dieser Gl. erfolgt. Die Ersatzdoppelparabel trägt die nach $x = -b$, $x = \xi$ erhaltenen Teilungen. — Im Teilsystem (2) trägt diese Parabel die Teilung für ξ und s, die nach $x = \xi$ und $x = -s^{3/4}$ erhalten werden. Die B. der y Achse erfolgt nach $y = \left(\frac{V}{40}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{8}$ (s. Abb. 44).

10. Tafeln mit Doppelkotenpunkten.

α) Gewöhnliche Maßstäbe und logarithmisches System: 1. Hier wären vorerst die viergliedrigen algebraischen Gl. zu behandeln.

$$x^m + a\,x^n + b\,x^r + c = 0.$$

(a, b, c beliebige, $m > n > r$ festgelegte Konstanten). Hier ergeben sich durch die Kombination von x^m mit einer der Größen a, b, c drei Fälle von Kurvenscharen für die lösenden Kurven, wozu noch durch die verschiedenen freien Konstanten weitere Verallgemeinerungen sich ergeben.

Bei den fünfgliedrigen algebraischen Gleichungen trägt sowohl festes als auch bewegliches Blatt eine Kurvenschar, was auch dann der Fall ist, wenn man auf den Fall des Gleichungspaars zurückgeht.

2. Tonnengehalt der Yachten. Die alte Formel der Union des Yachts français lautet:

$$130\,T = (L\,p - p^2/4)\sqrt{S},$$

worin T den Tonnengehalt, L die Länge an der Wassertracht in m, p den Umfang in m, S die Oberfläche des Segelwerks bedeutet. R. Soreau (1 a)[1] gibt eine von Chancel entworfene Netztafel mit 2 Geradenscharen, sowie eine von ihm entworfene Fluchtlinientafel[2]) wieder. Es ergibt sich im logarithmischen System:

als Gl. d. A. G. $\qquad y = 4\,L\,x - \frac{1}{\sqrt{S}} \quad . \quad$ (I),

als Gl. d. L. K. $\qquad y = 520\,T\,x^2 \quad$ (II),

deren B. nach $\qquad y = p\,x \quad . \quad$ (III)

Abb. 45.

[1]) a. a. O. S. 295 (ab. 59), M. d'Ocagne (1) S. 129.

[2]) a. a. O S. 340.

erfolgt. Es sind hier also im logarithmischen Bild (II) und (III) Parallelenscharen (siehe Abb. 45). Wie leicht ersichtlich, kann diese Tafel auch als verallgemeinerte Doppelstrahlentafel für 4 Veränderliche aufgefaßt werden.

Einen ganz ähnlichen Bau hätte die Tafel für die neue Formel

$$1000 \sqrt{M}\, T = (L p - p^2/4)\, S\,,$$

also für 5 Veränderliche, worin jetzt p den um die doppelte Höhe des Bordes (bordé) über der Wassertracht verminderten Umfang in m, M den eingetauchten Hauptteil in m² bedeutet und die übrigen Größen die gleiche Bedeutung wie früher besitzen. Es ist dabei die T entsprechende Geradenschar mit $z = T\sqrt{M}$ zu beziffern, woraus sich $T = \frac{z}{\sqrt{M}}$ durch eine Verschiebung um $\sqrt{M}$ ergibt, zu welchem Zwecke auf einem der Blätter eine $\sqrt{M}$-Leiter anzubringen wäre.

3. Auch für die bereits behandelte Bazinsche Formel kann eine Tafel mit Doppelkotenpunkten entworfen werden. Die Gl. lautet ausgeschrieben:

$$87\, R\sqrt{J} - U\sqrt{R} - U\gamma = 0.$$

Im logarithmischem System ergibt sich

als Gl. d. A. G. $\qquad y = -\gamma x + \sqrt{J} \quad \ldots\ldots \quad$ (I),

als Gl. d. L. K. $\qquad y^2 = \frac{U}{87} x \quad \ldots\ldots \quad$ (II),

deren B. erfolgt nach $\qquad y = \sqrt{R}\, x \quad \ldots\ldots \quad$ (III).

Die Tafel ist der vorhergehenden ganz ähnlich.

4. Für die restlich zu besprechenden Fälle, die im wesentlichen mit den von M. d'Ocagne (1) besprochenen Unterfällen 2 und 3 der allgemeinen Auflösung der sphärischen Dreiecke[1]) identisch sind, werde zunächst die Konstruktion der Tafeln in gewöhnlichen Maßstäben besprochen und hierauf diejenige einer Tafel im logarithmischen System mit bloß einer Kurve und zwei geradlinigen Leitern — wobei vom Stechzirkel Gebrauch zu machen ist, — bzw. eines Instruments, das sofort beschrieben werden wird. Außerdem wird in den Unterfällen 2 und 3 die Geradenbildtafel als Ablesegerät benützt; beide sind aber für alle 3 Unterfälle brauchbar.

a) Wahre Stunde nach der Sonnenhöhe. Hierfür gibt R. Soreau (1a)[2]) die Tafel von J. Mandl wieder, die auf Grund der Formel

$$\sin h = \sin \lambda_0 \sin d + \cos \lambda_0 \cos d \cos A H$$

entworfen worden ist. Hierin bedeutet h die scheinbare Sonnenhöhe, λ_0 die geographische Breite des Ortes, d die Deklination zur betreffenden Jahreszeit und $A H$ den Stundenwinkel.

Mit den Abkürzungen $\sin \lambda_0 = a$, $\cos \lambda_0 = b$, $A H = \varphi$ ergibt sich

$$-\sin h + a \sin d + b \cos d \cos \varphi = 0.$$

Gewöhnliche Maßstäbe: Einfachste Wahl aller freien Konstanten, also Division gibt mit $\xi = \frac{1}{a \sin d}$, $\quad \eta = \frac{b}{a} \operatorname{cotg} d$

als Gl. d. A. G. $\qquad \xi \sin h - \eta \cos \varphi = 1 \quad \ldots\ldots \quad$ (I),

als Gl. d. L. K. $\qquad \sin^2 \lambda_0\, \xi^2 - \operatorname{tg}^2 \lambda_0\, \eta^2 = 1 \quad \ldots\ldots \quad$ (II),

deren B. nach $\qquad \sin d = \frac{1}{\sin \lambda_0\, \xi} = \frac{\sin h}{\sin \lambda_0} \quad \ldots\ldots \quad$ (III)

erfolgt. Es ergibt sich für die Kurven gleicher d die Hyperbelschar

$$\sin^2 d\, \xi^2 - \operatorname{tg}^2 d\, \eta^2 = 1\,,$$

die also, bei veränderlichem λ_0 mit jener der λ_0 zusammenfällt. Die Einhüllende dieser Scharen sind die Geraden

$$\xi = \pm \eta \pm 1.$$

Es ergibt sich also eine der M. d'Ocagneschen Tafel[3]) — die Ellipsenscharen enthält — entsprechende, die wie diese für alle Kombinationen der gegebenen Größen brauchbar ist.

[1]) S. 332 bis 339.
[2]) S. 201, ab. 40.
[3]) M. d'Ocagne (1), S. 339. — R. Soreau (1a), S. 432 (abaque 100).

Logarithmische Maßstäbe: Hier ergibt sich mit $x = y \operatorname{cotg} d$, $y = \sin d$

als Gl. d. A. G.: $$y = \mp \operatorname{cotg} \lambda_0 \cos \varphi\, x + \frac{1}{\sin \lambda_0} \sin h \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L. K.: $$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(II)},$$

deren B. nach $$\sin d = y \quad \text{(III)}$$

erfolgt. Das untere Vorzeichen ergibt den Ast für die zweite Lösung von d. Es ist also auf der y-Achse die $\operatorname{cotg} \lambda_0$- bzw. $\operatorname{cosec} \lambda_0$-Leiter aufzutragen und nach Festlegung der zu dem gegebenen λ_0 gehörigen Punkte hieran mit dem Stechzirkel die zu φ und h gehörenden $\cos \varphi$- und $\sin \varphi$-Leiterstrecken. Es sind daher diese beiden Leitern auf der Tafel anzubringen. — Das erwähnte Instrument, das eigentlich erst in den folgenden Abschnitt **11** gehört, besitzt (s. Abb. 46) ein Grundblatt aus festem Material, in dessen rechteckiger Ausnehmung zwei Zungen gegeneinander verschieblich sind. An den beiden Rändern der Ausnehmung ist die $\operatorname{cotg} \lambda_0$- bzw. $\operatorname{cosec} \lambda_0$-Leiter aufgetragen, an der gemeinsamen Gleitfläche der Zungen — in die die y-Achse hineinfallend zu denken ist — auf den Zungen die cos- bzw. sin-Leiter. Die Benutzungsweise ist der beim gewöhnlichen Rechenschieber vollkommen entsprechend. Die Tafel, sowie das Instrument sind, da in bezug auf λ_0 und d symmetrisch, stets brauchbar. Es ist dann bei gegebenem d wie bei gegebenem λ_0 vorzugehen und statt d ist λ_0 abzulesen.

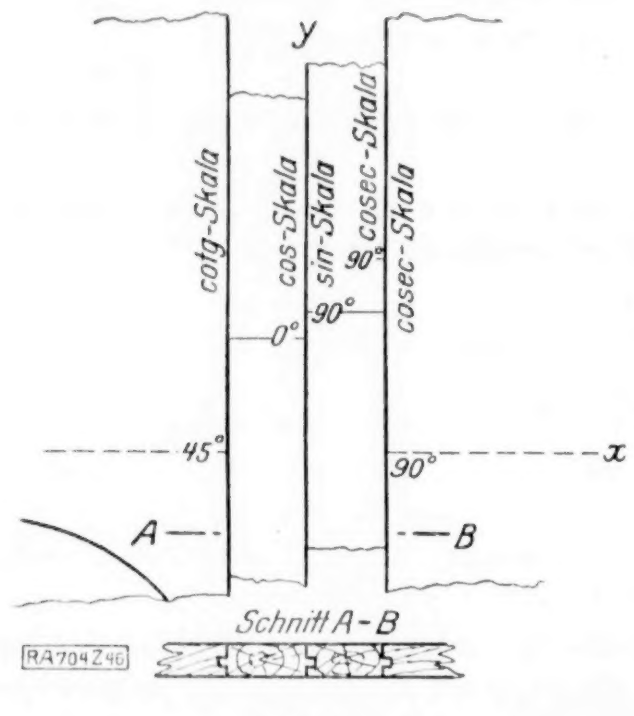


Abb. 46.

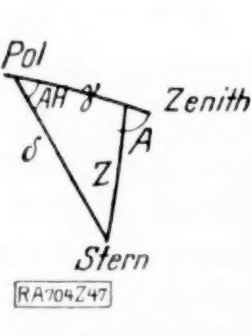


Abb. 47.

β) Stundenazimut und Beziehung der vier aufeinanderfolgenden Elemente. R. Soreau (1a)[1] und M. d'Ocagne (1)[2] geben die hierfür von Perret auf Grund der Gl.

$$\sin \gamma \operatorname{cotg} \delta + \sin \varphi \operatorname{cotg} A - \cos \gamma \cos \varphi = 0$$

entworfene Tafel wieder. (Die Bedeutung der einzelnen Größen zeigt Abb. 47.)

Gewöhnliche Maßstäbe: Division durch $\cos \gamma \cos \varphi$ gibt mit $\xi = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\cos \varphi}$, $\eta = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \gamma}$

als Gl. d. A. G. $$\xi \operatorname{cotg} \delta + \eta \operatorname{cotg} A = 1 \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L. K. $$\eta^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi - \xi^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi = 1 \quad \text{(II)},$$

deren B. nach $$\cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\eta} \quad \text{(III)}$$

erfolgt. Die Kurven gleichen γ sind die Hyperbelschar

$$\xi^2 \operatorname{cotg}^2 \gamma - \eta^2 \cos^2 \gamma = 1.$$

Sie entsteht aus der φ-Schar durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten; es ergibt sich so eine der Perretschen ähnliche Tafel, die ebenfalls Hyperbelscharen enthält.

Logarithmische Maßstäbe: Es ist

die Gl. d. A. G. $$y = x \frac{\operatorname{cotg} \delta}{\cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{cotg} A \quad \text{(I)},$$

die Gl. d. L. K. $$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(II)},$$

ihre B. erfolgt nach $$x = \sin \gamma \quad \text{(III)}.$$

Wird statt φ das Komplement $z = \pi/2 - \varphi$ in (I) eingetragen, so erhält man

$$y = x \frac{\operatorname{cotg} \delta}{\sin z} + \operatorname{cotg} z \operatorname{cotg} A \quad \text{(I')}.$$

[1]) S. 437 (abaque 102).

[2]) S. 343.

Daß die Reihenfolge von $\operatorname{cotg} z$ und $\frac{1}{\sin z}$ gegenüber der Gl. (I') im vorhergehenden Beispiel umgekehrt ist, macht nichts aus, da dies ja nur die Festlegung der Geradenbildtafel beeinflußt. Anstatt der früheren Leitern $\cos \varphi$ und $\sin h$ sind jetzt $\operatorname{cotg} \delta$ und $\operatorname{cotg} A$ zu setzen und ist auf dem Grundblatt der Tafel noch eine cotg-Leiter zu vermerken, von der aus mit dem Stechzirkel abzunehmen ist; auf den beiden Zungen des Instruments ist je eine solche (auf den Unterseiten) anzubringen. — Ist γ eine der gegebenen Veränderlichen und φ gesucht, so ist auf der $\operatorname{cotg} \gamma$-Leiter, bzw. auf der beweglichen Zunge A mit δ zu vertauschen und auch wieder statt γ sein Komplement zu nehmen.

Der 1. Unterfall, die Berechnung eines vierten Bestimmungsstückes aus der Gl.

$$\sin A \sin b = \sin a \sin B$$

ergibt sich mit Hilfe der sin-Leitern, — ganz analog wie beim logarithmischen Rechenschieber — durch logarithmische Addition mittels des Stechzirkels, bzw. auf dem Instrument mit Hilfe der cosec-Leiter, zu welchem Zwecke eine solche auch auf der entsprechenden Zunge (s. Abb. 46) aufzutragen ist. Es tritt hier also das Ableseblatt überhaupt nicht in Anwendung.

Das für die letzten beiden Fälle dienende Grundblatt hätte im wesentlichen — bis auf die auf der y-Achse angebrachten Teilungen den gleichen Aufbau wie Abb. 26; es wurde daher von einer gesonderten Konstruktion abgesehen.

β) Kreisförmige Ableselinie: 1. Auf Seite 212 seines Lehrbuches gibt H. Schwerdt (1) eine Tafel für die Gl.

$$\alpha(\gamma - \delta) = \beta + \gamma + \delta,$$

bei der die Skalen für α und β auf den parallelen Trägern aufgetragen sind. Es soll nun das dieser Tafel entsprechende Bild konstruiert werden, wobei aber betont werden muß, daß sich hier zweckmäßig α und β unter den gegebenen Größen befinden müssen, da sonst die Tafel nicht unmittelbar verwendet werden könnte.

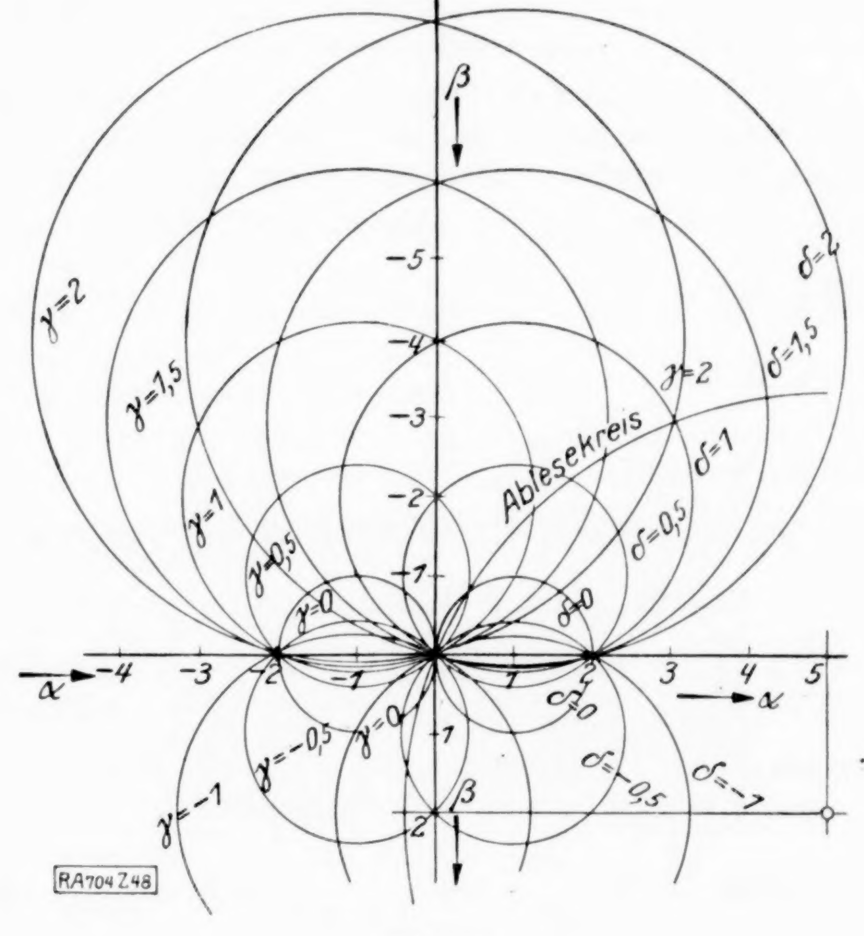


Abb. 48.

Nach leichter Umformung ergibt sich

$$\alpha \frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta} - \frac{\beta}{\gamma + \delta} = 1.$$

Mit $\frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $\frac{1}{\gamma + \delta} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$ ergibt sich

als Gl. d. A. K. $$\alpha \frac{2x}{x^2 + y^2} - \beta \frac{2y}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{(I)},$$

als Gl. d. L. K. $$(x - 1)^2 + (y - 2\delta)^2 = 1 + 4\delta^2 \quad \text{(II)},$$

deren B. durch die Schar $$(x + 1)^2 + (y - 2\gamma)^2 = 1 + 4\gamma^2 \quad \text{(III)}$$

erfolgt. Abb. 48 gibt für $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$.

2. Im Anschluß hieran werde das von M. d'Ocagne (1) [1]) gegebene »trigonometrische Gitter« kurz besprochen. Es knüpft an die im Vorstehenden bereits behandelte Formel der sphärischen Trigonometrie und Astronomie

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

[1]) S. 299. — R. Soreau (1a), S. 433; V. Láska - V. Hruška (1), S. 112.

an, die aufgeschrieben werden kann:

$$2 \cos a = (\cos \varphi_2 + \cos \varphi_1) + \cos A (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$$

mit $\varphi_{1,2} = b \pm c$. Nach Division durch den 1. Klammerausdruck erhält man

als Gl. d. A. G. $\qquad \cos a\, x - \cos A\, y = 1 \quad \ldots \quad (I),$

als Gl. d. L. K. $\qquad x = \frac{2}{\cos \varphi_2 + \cos \varphi_1} \qquad$ oder $\qquad y = x \cos \varphi_2 - 1,$

und der B. $\qquad y = \frac{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1}{\cos \varphi_2 + \cos \varphi_1} \qquad x = - x \cos \varphi_1 + 1.$

Es ergeben sich wieder lineare Gl. für die φ_1- und φ_2-Scharen, so daß die hierfür entworfene Tafel diejenige des 1. Beispiels ganz ähnlich wäre. Selbstverständlich können diese »Gitter« nur bei gegebenem b und c unmittelbar benutzt werden. M. d'Ocagne gibt aber a. a. O. ein Verfahren an, wie man mittelbar ebenfalls zum Ziele gelangen kann, wenn b oder c unbekannt sind.

γ) Rechenschieber: Als 1. Beispiel werde das eben besprochene 1. Beispiel des vorhergehenden Punktes β wiedergewählt. Hier ist, da die Gerade als Ableseelement dient, die gegebene Einschränkung gegenstandslos.

1. Wahl [für die Transformationsgleichung (a)]:

Gl. d. A. F.: $\qquad \frac{\alpha}{x} - \beta \frac{y}{x} = 1 \quad \ldots \quad (I),$

Gl. d. L. K.: $\qquad \frac{1}{x} + 2\,\delta \frac{y}{x} = 1 \quad \ldots \quad (II),$

deren B. nach $\qquad -\frac{1}{x} + 2\,\gamma \frac{y}{x} = 1 \quad \ldots \quad (III)$

erfolgt: also beides Geraden durch den Punkt $x = \pm 1$ (s. Abb. 49).

2. Wahl: Gl. d. A. F.: $\qquad -\frac{\beta}{x} + \alpha \frac{y}{x} = 1 \quad \ldots \quad (I),$

Gl. d. L. K.: $\qquad y = x - 2\,\delta \quad \ldots \quad (II),$

deren B. erfolgt nach: $\qquad y = -(x - 2\,\gamma) \quad \ldots \quad (III);$

beides sind Parallelenscharen (s. Abb. 50). In den Abb. 49 und 50 ist das Beispiel $\beta = 1,\ \gamma = 2,\ \delta = 1 : \alpha = 4$ durchgeführt.

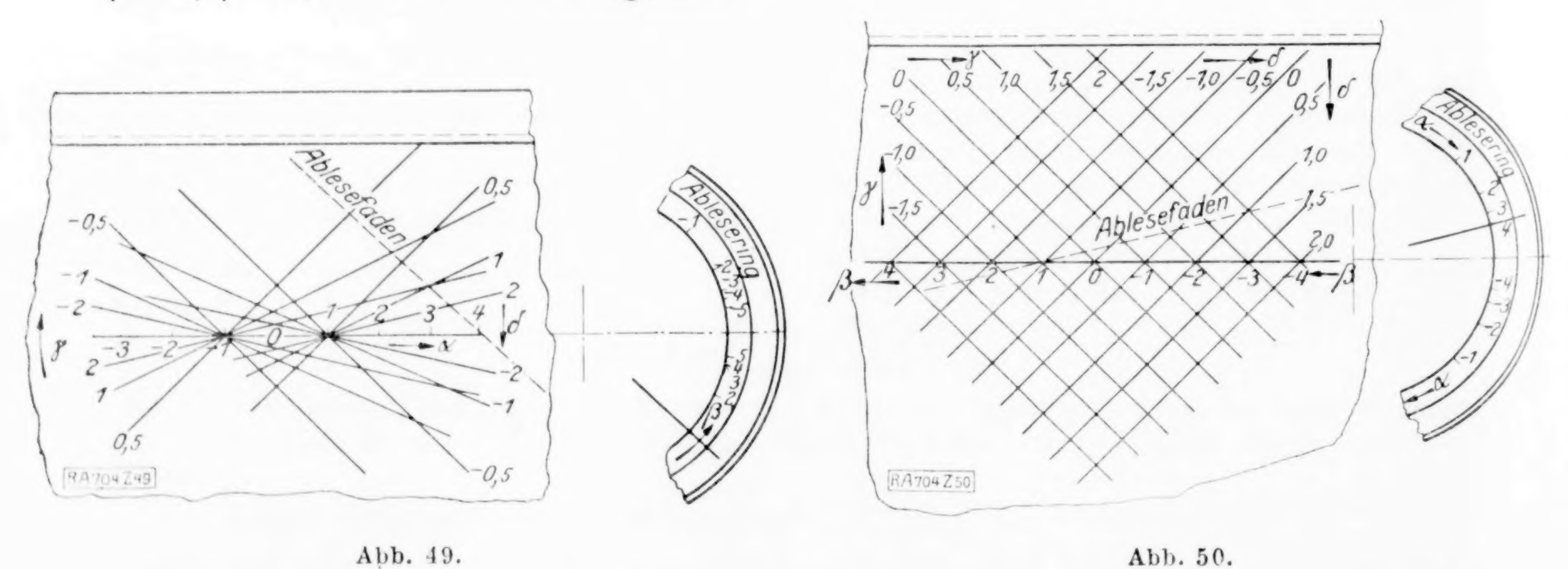


Abb. 49. Abb. 50.

2. Beispiel: Hierfür diene die bereits behandelte »Bestimmung der wahren Stunde nach der Sonnenhöhe«, mit der Form der Transformationsgleichung (b) und den Bezeichnungen von C. Runge (1). Ist h die Höhe, a das Azimut und δ die Deklination des Himmelskörpers, sowie φ die geographische Breite des Beobachtungsortes (a ist hier das Supplement des Winkels PZS), so lautet die Gleichung zwischen diesen Veränderlichen

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a.$$

Nach Bekanntem ergibt sich aus dem System $\xi = \frac{1}{\sin \varphi \sin h},\ \eta = \frac{\operatorname{tg} h}{\operatorname{tg} \varphi}$ mit $\xi = \frac{1}{y},\ \eta = \frac{x}{y}$

als Gl. d. A. F.: $y = x\cos\varphi + \sin\delta$ . . . . (I),

als Gl. d L. K.: $\dfrac{x^2}{\cos^2\varphi} + \dfrac{y^2}{\sin^2\varphi} = 1$ . . . . (II),

deren B. erfolgt nach: $\dfrac{x^2}{\cos^2\delta} + \dfrac{y^2}{\sin^2\delta} = 1$ . . . . (III),

also in vollkommener Uebereinstimmung mit C. Runge. Die entsprechende Abbildung zeigt die Fig. 70 des Rungeschen Buches. Der Läufer enthält die $\cos\varphi$-Leiter (nicht die reziproke), die $\sin\delta$-Leiter ist auf der y-Achse aufzutragen. Es wäre zu der Fig. 70 zu bemerken, daß die rechte Lotrechte (für a) wohl ebenfalls gestrichelt zu zeichnen wäre, da sie sich auf dem verschieblichen Ableseblatt befindet.

J. W. N. Le Heux (1)[1]) bemerkt im Anschluß an diese Tafel, daß man dieselbe — übrigens wie viele der Tafeln mit Doppelkotenpunkten — für $\delta = 0$ als Multiplikationstafel gemäß der Formel

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}h = \Theta$$

benutzen könnte. Es soll hier gezeigt werden, daß auch der dritte Unterfall — des sphärischen Sinussatzes — durch die Tafel erledigt wird. Setzt man nämlich $a = 90^0$, so entsteht zunächst

$$\sin\delta_{90} = \sin\varphi\sin h.$$

Durch Anwendung des Prinzips der Zapfenlinie kann der Wert δ_{90} bei der Zerfällung des Sinussatzes

$$\sin a\sin B = \sin\delta_{90}\,,\qquad \sin A\sin b = \sin\delta_{90}$$

als Hilfswert angesehen werden. $a = 90^0$ bedeutet aber, daß die Wagerechte durch den Punkt A, b auch das Wertepaar a, B enthält. Wie leicht ersichtlich, ist dabei der Läufer mit bloß einem Faden nicht verwendbar; es ist also entweder die Anwendung eines Lineals oder des Läufers mit Parallelfäden erforderlich.

Die zweite Wahl werde ebenso wie bei C. Runge nicht weiter behandelt.

Als 3. Beispiel werde die ebenfalls bereits vertafelte Beziehung zwischen Deklination δ, Azimut a und Stundenwinkel t des Himmelskörpers, sowie der Breite φ des Beobachtungsortes wieder gewählt. Es ist in der Rungeschen Bezeichnungsweise

$$\operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\varphi\cos t - \frac{\sin t}{\cos\varphi}\operatorname{cotg} a\,.$$

Mit $\xi = \dfrac{1}{y}$, $\eta = \dfrac{x}{y}$ ergibt sich aus dem System $\xi = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi\cos t}$, $\eta = \dfrac{\operatorname{tg} t}{\sin\varphi}$ nach bekannter Rechnung

als Gl. d. A. F.: $y = x\operatorname{cotg} a + \operatorname{tg}\delta$ . . . . (I),

als Gl. d. L. K.: $\dfrac{x^2}{\sin^2 t} - \dfrac{y^2}{\cos^2 t} = 1$ . . . . (II),

deren B. nach: $x^2\cos^2\varphi + y^2\operatorname{cotg}^2\varphi = 1$ . . . . (III)

erfolgt. Die Fig. 71 des Rungeschen Buches zeigt das entsprechende Grundblatt. Der Läufer hätte die Eigentümlichkeit, daß die Teilung auf ihm die regelmäßige Kreisteilung mit dem Nullpunkt auf dem lotrechten Durchmesser ist. Die Strahlen zu den einzelnen Punkten dieser Teilung sind bei der Lage des Läufers im Nullpunkt gemäß einer Bemerkung von C. Runge die Asymptoten der t-Hyperbeln. In der Fig. 71 wären sie der Deutlichkeit halber gestrichelt zu denken, da sie ja als verschiebbares Ableseblatt gedacht sind.

Auch hier böte die zweite Wahl keine neuen Schwierigkeiten.

11. Darstellung mit Hilfe beweglicher Ableseelemente. Für das Gegenstück des Ablesegerätes mit Parallelenschar im logarithmischen System sollen jene beiden Beispiele gegeben werden, die auch M. d'Ocagne (1) zu diesem Behuf heranzieht.

Das erste Beispiel betrifft die Stützmauern (s. o.). Schreibt man nämlich im logarithmischen System vor:

$$p\,(u\sin\varphi\cos\varphi - v/3\cos^2\varphi) = -1$$

[1]) Beginselen der Nomographie, Deventer 1926, S. 47.

und setzt $u = 1/y$, $v = x/y$, so erhält man:

als Gl. d. A. G.: $- \sin \varphi \cos \varphi + \frac{x}{3} \cos^2 \varphi = \frac{1}{p} y$ . . . . (I),

als Gl. d. L. K.: $x\,y = 1$ . . . . (II),

ihre B. erfolgt nach: $K = 1/x$ . . . . (III).

Das Grundblatt enthält dann nur die bezifferte Gerade (II); es ist aber das Ableseblatt nach Einstellung des φ-Wertes um $1/p$ zu verschieben, was die Anbringung einer $1/p$-Leiter parallel zur y-Achse erforderlich macht. Der Schnitt der verschobenen Geradenbildtafel mit (II) gibt dann die Lösung.

Als zweites Beispiel diene die Bazinsche Formel (s. o.). Setzt man nämlich

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{R}}, \qquad x = \sqrt{R},$$

so erhält man

als Gl. d. A. G.: $\frac{\sqrt{J}}{U} y = \frac{x}{87} + \frac{\lambda}{87}$ . . . . (I),

als Gl. d. L. K.: $y = x^2$ . . . . (II),

ihre B. erfolgt nach: $y = x\sqrt{R}$ . . . . (III).

Hier hat das Ableseblatt also nach der Einstellung in γ eine doppelte Verschiebung parallel zu sich selbst mitzumachen. Die benötigte $\sqrt{J}$-Leiter ist aus der Konstruktion der Tafel ($\sqrt{R}$!) vorhanden; die regelmäßige U-Leiter ist mit der regelmäßigen γ-Leiter identisch. Die Verschiebungsstrecken sind — wie auch im Vorhergehenden — durch Einstechen auf dem Ableseblatt zu vermerken.

12. Einige Fluchtlinientafeln auf der Kugel. Anhangsweise sollen einige Fluchtlinientafeln auf der Kugel in Orthogonalprojektion abgebildet werden, wodurch sich, wie bereits im ersten Teil erwähnt, ebenfalls Fluchtlinientafeln in der Ebene mit Ellipsenbüschel als Ablesegerät ergeben. Die Konstruktion dieser Tafeln aus jener mit gerader Ableselinie ist ebenfalls bereits genau besprochen worden, so daß sich alles weitere erübrigen dürfte. In den Abbildungen ist — oben — die »Urtafel« mit geklammerter Bezifferung angegeben.

Abb. 51 zeigt die Tafel für $1/C = 1/A + 1/B$; es ist der Fall $A = 1$, $B = 3$, $C = 0{,}75$ eingezeichnet. Im linken oberen Quadranten ist die Konstruktion des Punktes $B = 2$ (gemäß Abb. 4b) erläutert.

Abb. 52 zeigt die Divisionstafel $A = C/B$; für $C = 2$, $B = 1$ ergibt sich $A = 2$.

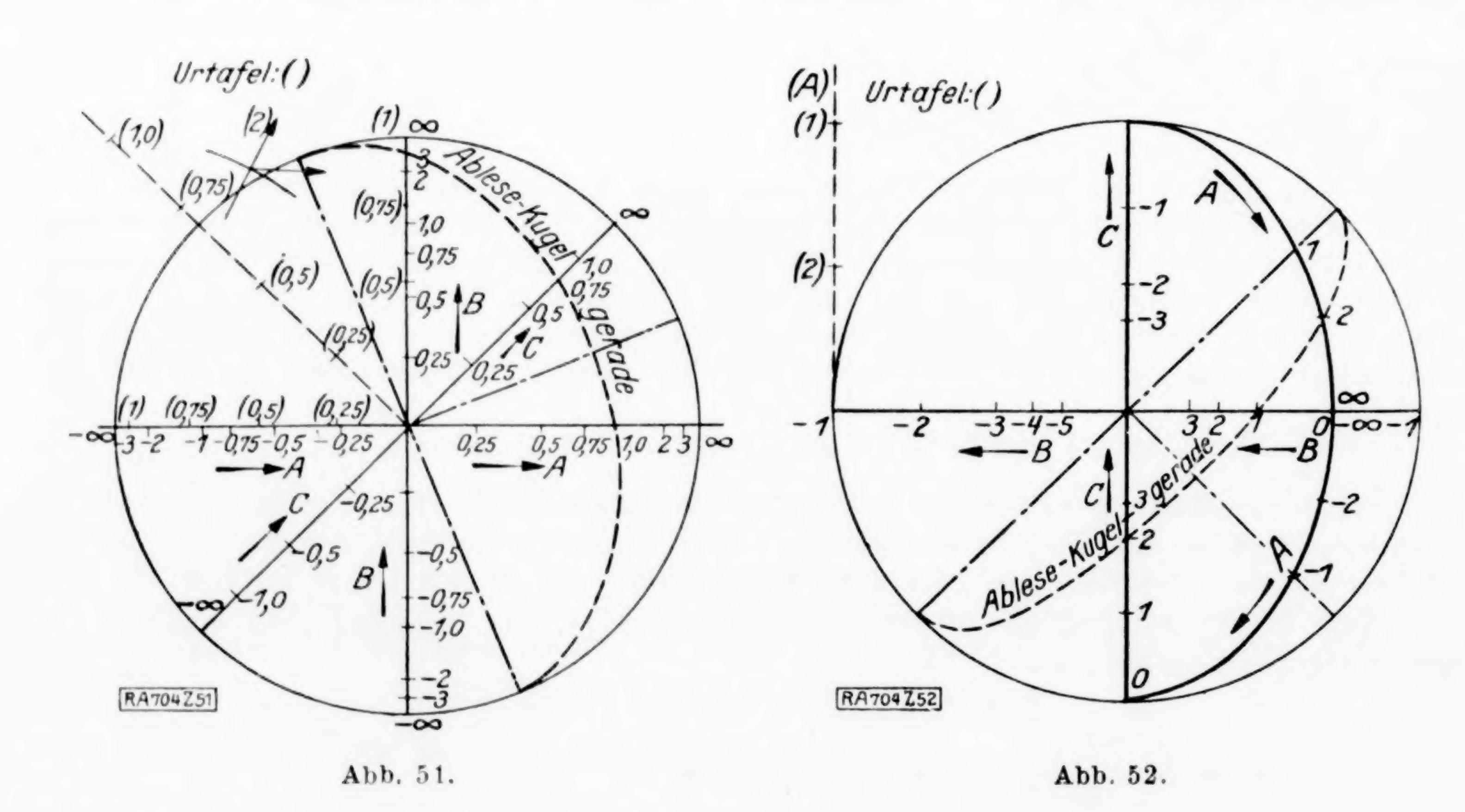


Abb. 51. Abb. 52.

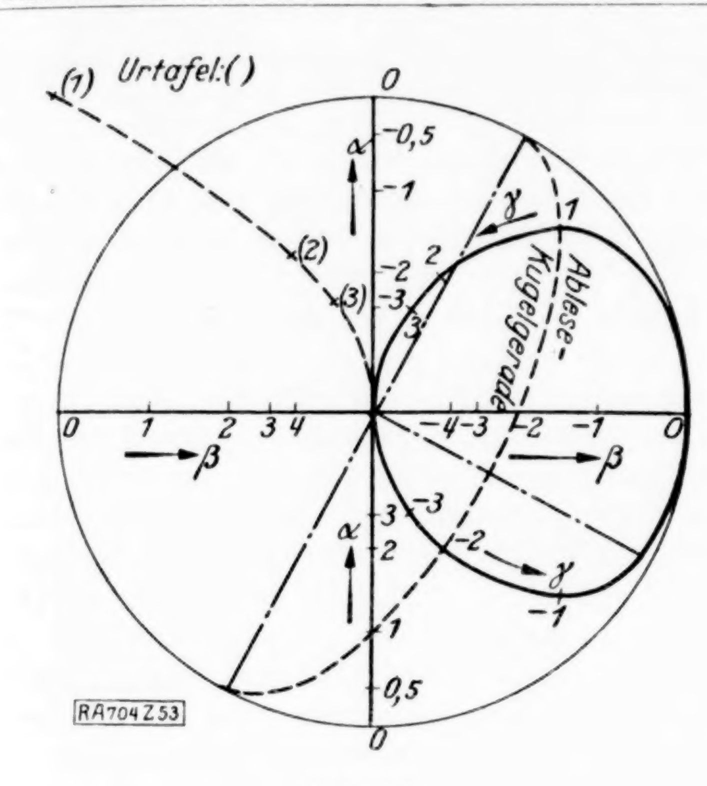


Abb. 53.

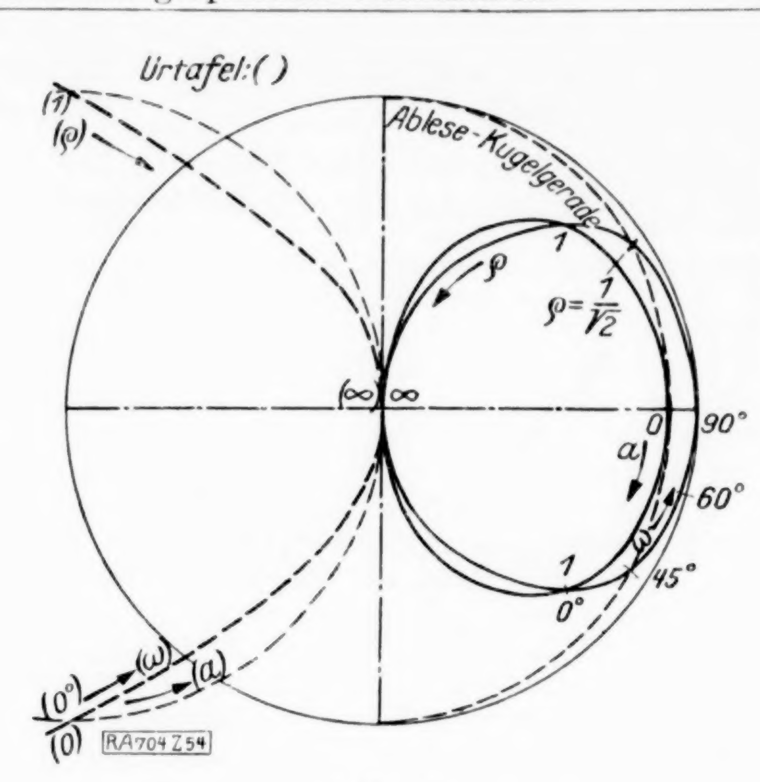


Abb. 54.

Abb. 53 zeigt die Lösung der quadratischen Gleichung $\gamma^2 + \alpha\,\gamma + \beta = 0$ mit Hilfe der Parabel (nach Abb. 12). Es ist die besondere Wahl $\alpha = 1$, $\beta = -2$ durchgeführt, die als Lösung die Werte $\gamma = 1$, $\gamma = -2$ ergibt.

Abb. 54 gibt die aus Abb. 29 entstandene Tafel für das »unmittelbare Schießen mit Entfernungsmessung« gemäß der Gleichung $-\varrho\cos\omega + (\varrho - \cos\omega)\,a + \frac{1+a^2}{2} = 0$ wieder. Die Wahl $a = 0$, $\omega = 45$ gibt $\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

In Abb. 55 ist schließlich das von H. Schwerdt (1)[1]) für diese kanonische Form (V) herangezogene Beispiel $\alpha = \beta + \gamma$ ebenfalls gewählt worden. H. Schwerdt benutzt die Identität

$$-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\gamma}{\sin\beta - \sin\gamma}.$$

Durch Uebergang zu den hyperbolischen Funktionen ergibt sich

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\mathfrak{Cos}\,\beta - \mathfrak{Cos}\,\gamma}{\mathfrak{Sin}\,\beta - \mathfrak{Sin}\,\gamma};$$

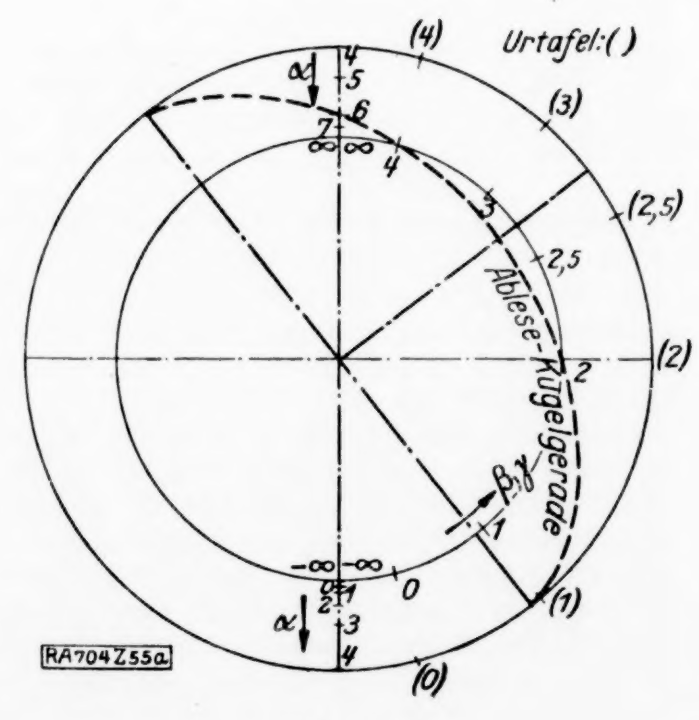


Abb. 55a.

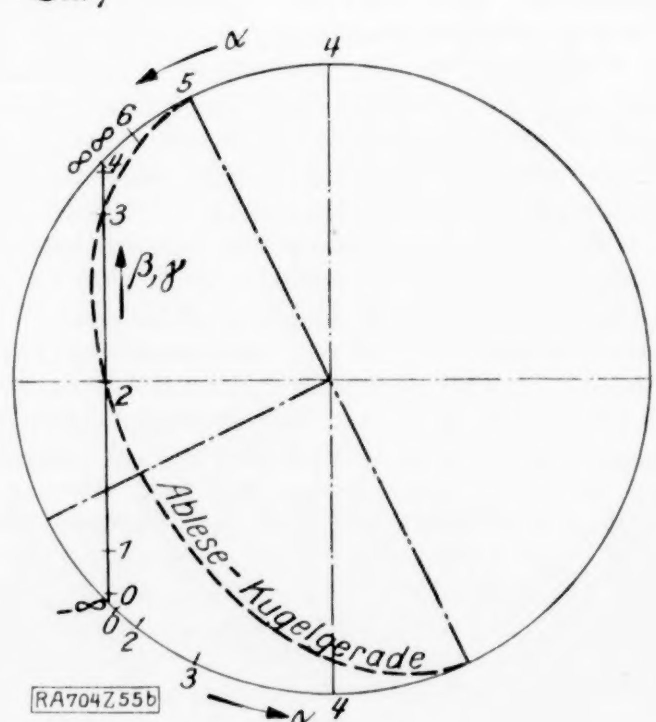


Abb. 55b.

[1]) S. 188 (Abb. 99)

es sind dann in der »Urtafel« die L. K., sowie die Ersatzkurve μ die beiden zusammenfallenden Kreise

$$\xi^2 + \eta^2 = 1,$$

— (statt der gleichseitigen Hyperbel bei H. Schwerdt), — deren B. nach $\eta = \mathfrak{Tg}\,\beta$, bzw. $\mathfrak{Tg}\,\gamma$ erfolgt. Auf der η-Achse ist die $\mathfrak{Cotg}\,\alpha/2$-Leiter aufzutragen. In den Abbildungen ist eine »Verzifferung« vorgenommen worden, d. h. es ist der Anfangspunkt der Leitern um 2 bzw. 4 verlegt worden, gemäß der Gl. $\alpha + 4 = (\beta + 2) + (\gamma + 2)$. Das in Abb. 55a eingetragene Beispiel betrifft die Wahl $\beta = 2$, $\gamma = 4$. Der Besonderheit des vorliegenden Falls entsprechend, sind auch die beiden anderen Projektionsbilder leicht herstellbare Tafeln. Abb. 55b gibt den Fall $\beta = 2$, $\gamma = 3$, Abb. 55c den in Abb. 55a gewählten wieder.

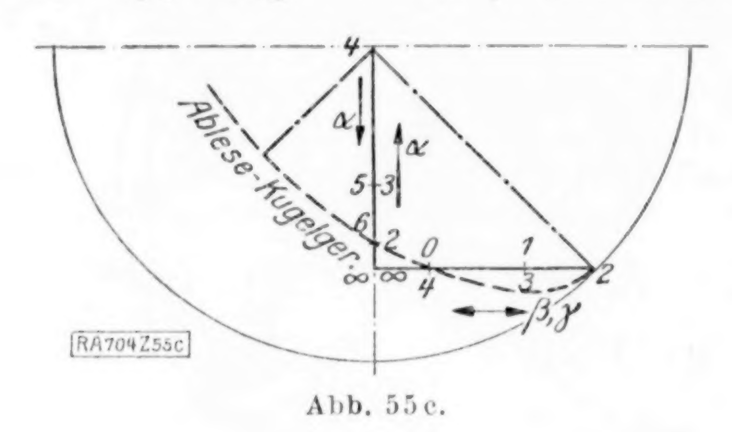


Abb. 55c.

Die Konstruktion und Benutzung der im Vorstehenden sonst behandelten Fluchtlinientafeln, sowie anderen Nomogramme ist, wie leicht ersichtlich, ohne neue Schwierigkeit ebenfalls möglich. Bei den Tafeln mit mehrfachen Fluchten kann die Einstellung des Ablesegeräts ebenfalls durch reine Drehung bewerkstelligt werden. 704

Göding (Mähren), im Juli 1926.

KURZE AUSZÜGE

Hydromechanik und Hydraulik.

Druckverteilung an Luftschiffkörpern. Die Verteilung des hydraulischen Druckes, wie sie sich an einem rotationssymmetrischen Luftschiffkörper bei beliebiger Fahrtrichtung einstellt, untersucht Th. v. Kármán (Abh. a. d. Aerodyn. Inst. Aachen H. 6, 1927, S. 1 bis 17) mit den Mitteln der Theorie idealer, inkompressibler Flüssigkeiten. Die symmetrischen Verhältnisse bei Fahrt in der Achsrichtung gewinnt man in bekannter Weise, wenn man ein Strömungsbild aus einer Anzahl von in der Achse liegenden Quellen zusammensetzt und die Ergiebigkeit der einzelnen Quellen durch die Erfüllung der Randbedingungen bestimmt. Neu und fruchtbar ist der Gedanke, für Fahrtrichtung senkrecht zur Achse oder Anströmung des Luftschiffkörpers in diesem Sinne eine Lösung der Gleichungen durch Annahme von Doppelquellen, die in der Drehachse liegen und nach der Anströmrichtung orientiert sind, herzustellen. Durch Verbindung der beiden Lösungen erhält man den allgemeinsten Fall. Die vom Verfasser erzielten Rechnungsergebnisse stimmen in befriedigender Weise mit den neueren Beobachtungen von Klemperer und den älteren Messungen von Fuhrmann überein. Eine gewisse Abweichung im Fall der senkrechten Anströmung wird auf Wirbelbildung hinter dem Luftschiffkörper zurückgeführt, zu deren Abschätzung man die Gedankengänge der Prandtlschen Tragflügeltheorie heranziehen kann.

Strömungs- und Druckverlauf an Widerstandskörpern. An zylindrischen Streben von Kreisquerschnitt und Tropfenquerschnitt sowie an Kugeln hat H. Ermisch im Aachener Institut Strömung und Druckverlauf bei verschiedenen Geschwindigkeiten untersucht, worüber er in H. 6 der Abhandl. a. d. Aerodyn. Inst. Aachen (S. 18 bis 50) berichtet. Es zeigt sich stets, daß im vorderen Teil des angeströmten Körpers die Beobachtungen mit der Potentialströmung, die nach der Theorie der idealen Flüssigkeit berechnet ist, gut übereinstimmen. Die Beobachtungen, die sich im weiteren Verlauf der Strömung ergeben, werden in sauberer Weise experimentell festgestellt, ohne daß es möglich wäre, sie in befriedigender Weise theoretisch zu erklären. Von Interesse ist auch die Gegenüberstellung des beobachteten Gesamtwiderstandes und der aus dem gemessenen Druckverlauf berechneten Widerstandskraft, die naturgemäß nur einen Teil des ersteren bildet.

Existenzproblem in der Hydrodynamik. Weit abseits von dem Gebiet, das die Mehrzahl der heute mit Hydromechanik Beschäftigten interessiert, führen uns zwei umfangreiche Arbeiten von L. Lichtenstein über sogenannte Existenzprobleme der Hydrodynamik (Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 89 bis 309, 26 (1927), S. 196 bis 323). Es handelt sich um inkompressible ideale Flüssigkeiten, in der zweiten Abhandlung um solche, deren Dichte nicht an jeder Stelle die gleiche ist. Bewiesen wird im wesentlichen der folgende allgemeine Satz: Gegeben sei zu Beginn des betrachteten Zeitraums Dichte und Geschwindigkeit der Flüssigkeit in jedem Punkte innerhalb des die Flüssigkeit umschließenden Gefäßes, ferner für den ganzen in Betracht kommenden Zeitraum die Bewegung des Gefäßes; dann gibt es eine und nur eine den

Eulerschen Gleichungen genügende Flüssigkeitsbewegung, falls die gegebenen Funktionen gewisse sehr allgemein gehaltene Stetigkeitsforderungen erfüllen. Die analoge Behauptung läßt sich für die unbegrenzte Flüssigkeitsmasse aufstellen, wenn gewisse Voraussetzungen für das Verhalten im Unendlichen hinzugefügt werden. Die Schwierigkeit des Beweises liegt in dem Umstand, daß nicht die Druckverteilung im Innern des Gefäßes zu Beginn als bekannt vorausgesetzt und diese Unvollständigkeit der Anfangsbedingungen durch das Hinzutreten der Randbedingung, daß die Gefäßbewegung durch alle Zeiten vorgeschrieben ist, wettgemacht wird. Die Untersuchung führt daher sinngemäß über die Helmholtzschen Gleichungen, bzw. in den Fällen nicht überall gleicher Dichte über ihre entsprechende Verallgemeinerung. Den Nachweis der Existenz einer Lösung so zu gestalten, daß sie in einem konkreten Falle etwa wirklich numerisch hergestellt werden könnte, lag offenbar nicht in den Absichten des Verfassers.

Mehrdeutigkeit der Theorie idealer Flüssigkeiten. Es ist bekanntlich eine die Anwendungen der Theorie beherrschende Tatsache, daß die Gleichungen für ideale Flüssigkeiten mit den naturgemäß gegebenen Randbedingungen die stationäre Bewegung nicht eindeutig bestimmen. Ein sehr einfaches und anschauliches Beispiel hierfür gibt Odquist in einer neueren Arbeit (Ark. f. Matematik, Astron. u. Fysik 19 A 1926). Es handelt sich dabei um den Ausfluß aus einem Gefäß von endlicher Breite, der nach der Kirchhoffschen Methode als Aufgabe der ebenen Bewegung aufgefaßt wird. Die Ausflußzahl und die Gestalt des ausfließenden Strahles lassen sich in bekannt einfacher Weise[1]) mit Hilfe der konformen Abbildung ermitteln, wenn man annimmt, daß alle im Gefäße befindlichen Flüssigkeitsteilchen an der Bewegung teilnehmen. Die Endpunkte der von einem festen Punkt aus aufgetragenen Geschwindigkeitsvektoren aller Teilchen erfüllen dann eine Halbkreisfläche. Nun hindert aber nichts, wie Odquist zeigt, die Annahme, daß an den beiden Ecken des Gefäßes ein Gebiet ruhender Flüssigkeit übrig bleibt. An der Grenze dieses Gebiets, das natürlich konstanten Druck aufweisen muß, haben die Geschwindigkeitsvektoren konstante Länge. Es sind also aus dem Halbkreis des Geschwindigkeitsplanes zwei Viertelkreise von beliebigem Radius auszuschließen. Selbst wenn man die Symmetrie der Strömung voraussetzt, bleibt noch eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen, die man erhält, indem man statt des vollen Halbkreises eine Halbkreisringfläche als das Gebiet der Geschwindigkeitsvektoren ansieht. Die Rechnung, die von Odquist zahlenmäßig durchgeführt wird, zeigt erhebliche Abweichungen in den Werten der Ausflußzahlen.

[1]) Vergl. z. B. R. v. Mises, Zeitschr. Ver. dtsch. Ing. 1917, S. 447 ff.

Umlenkung eines Flüssigkeitsstrahles an einer Platte. Es ist ein klassisches Problem der älteren Hydraulik, zu untersuchen, was aus einem Wasserstrahl wird, der senkrecht auf eine ebene Platte auftrifft und sich nun in eine Strömung längs der Platte auflöst. F. Reich hat mit dem Ziele, günstige Formen für Saugrohre von Wasserkraftanlagen zu finden, die genannte Aufgabe experimentell und theoretisch in Angriff genommen. (Forschungsarb. auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, H. 290.) Er behandelt dabei den Strömungsvorgang mit den Mitteln der Theorie idealer Flüssigkeiten als axialsymmetrisches Problem; allein die Lösung, die er gibt, genügt nicht den offenbar wesentlichen Randbedingungen der freien Oberfläche. Unter den unendlich vielen Stromfunktionen, die die Bedingungen an der Platte erfüllen, wählt er unter Benutzung der gemessenen Oberflächenlinie der Strömung eine passende aus. Die sehr eingehenden, schönen Messungen der Strahlbegrenzung, die der Verfasser mit Unterstützung der Helmholtz-Gesellschaft im Institut für Wasserkraftmaschinen der Techn. Hochschule Hannover vorgenommen hat, würden es lohnend erscheinen lassen, die richtige Lösung des hydrodynamischen Problems aufzusuchen (was nicht sehr schwierig ist) und sie mit den Versuchsergebnissen zu vergleichen.

Schmiermittelreibung. Um die Ergebnisse der hydrodynamischen Theorie der Lagerreibung für die Praxis verwertbar zu machen gibt George B. Karelitz (in Bd. 47 der Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, S. 1101 bis 1122) eine Reihe von graphischen Rechentafeln, die den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Variablen darstellen. Die Bogenlänge des tragenden Bereiches, an dessen Enden der Druck gleich dem Außendruck gesetzt ist, wird dabei als unabhängiger Parameter behandelt. Für die Druckverteilung längs der Achsrichtung wird willkürlich ein parabolisches Gesetz angenommen. — H. A. S. Howarth sucht (a. a. O. S. 1073 bis 1100) in Fortsetzung früherer Veröffentlichungen an gleicher Stelle (Bd. 45 u. 46) die Theorie selbst weiter zu führen. Er betrachtet den Fall, daß die Krümmungsradien von Welle und Lagerschale nicht übereinstimmen, getrennt von dem Fall gleicher Radien. Das Ziel ist vor allem die genaue numerische Berechnung des Reibungsmomentes. — In der Diskussion zu beiden Vorträgen werden manche interessante Fragen angeschnitten.

Messung von Wassermengen. A. Staus bespricht in einem kleinen Büchlein (Der Genauigkeitsgrad von Flügelmessungen bei Wasserkraftanlagen, Berlin 1926, 35 S.) die Verfahren, durchströmende Wassermengen mittels eines in die Strömung gestellten Flügelrades zu messen. Die Eichung des Flügels, der eigentlich die Ge-Geschwindigkeit der Strömung in seiner Umgebung anzeigt, erfolgt durch Schleppversuche in ruhendem Wasser. Dabei ergeben sich

Schwankungen bis zu $\pm 0{,}5$ vH. Größere Fehler entstehen bei der Durchführung der Messungen vor allem durch Schrägströmungen, dann in Wandnähe dadurch, daß der Flügel nur einen Durchschnittswert über eine verhältnismäßig große Fläche liefert, schließlich durch die Pulsationen der Geschwindigkeit. Dazu kommt, wenn man die Wassermenge berechnet, noch die Ungenauigkeit der Profilbestimmung und der Integrationsfehler. Der Verfasser gibt eine Reihe von Versuchsresultaten an, in denen Flügelmessungen untereinander und mit andersartigen Messungen (Ueberfall, Schirm, Salzlösung) verglichen werden. Zu einer abschließenden Beurteilung des Flügelverfahrens und des besonders eingehend behandelten Ott-Flügels gelangt man nicht, da kein Meßverfahren bekannt ist, dem man eine unbedingt überlegene Genauigkeit zuzuerkennen vermag.

Mises. 798

KLEINE MITTEILUNGEN

Ueber Duffings Methode zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wenn man den analytischen Gedanken jener Methode, welche Duffing in seinem Aufsatz »Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen«, Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Heft 224, 1920, entwickelt, von geometrischem Beiwerk und gewissen, dem Ingenieur besonders lieb gewordenen Vorstellungen loslöst, so erkennt man, daß hier ein ähnliches Prinzip vorliegt, das auch bei einer bekannten Herleitung der Eulerschen Summenformel und auch bei der üblichen Ableitung der Runge-Kuttaschen Formel benutzt wird. Hierbei wird auch klar, wie man eine Fehlerabschätzung vornehmen könnte. Ferner ergibt sich, daß man bei folgerichtiger Durchführung des Grundgedankens bei der hier unter III. behandelten Aufgabe mit derselben Rechenarbeit genauere Resultate erzielt. Die im folgenden angeführten Methoden kommen vorwiegend nur bei linearen Differentialgleichungen in Betracht[1]).

I. Differentialgleichungen erster Ordnung.

Es sei die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

unter den Anfangsbedingungen für

$$x = x_0, \quad y(x_0) = y_0$$

numerisch zu lösen. Setzt man zur Abkürzung

$$y(x_0 + h) = y_1, \quad y'(x_0 + h) = y_1', \quad y''(x_0 + h) = y_1''$$

usw., so liefert eine erste Beziehung für die gesuchten Werte y_1 und y_1' die Differentialgleichung selbst:

$$y_1' = f(x_0 + h, y_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Eine zweite Gleichung erhält man durch Anwendung der Taylorschen Formel auf y_1 bzw. y_1':

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \frac{y^{IV}(x_0 + \vartheta h)}{4!} h^4 \\ h y_1' &= \phantom{a_0 +{}} a_1 h + 2 a_2 h^2 + 3 a_3 h^3 + \frac{y^{IV}(x_0 + \bar\vartheta h)}{3!} h^4 \end{aligned}\right\} (2).$$

[1]) Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen müssen entsprechend den angeschriebenen Ableitungen gemacht werden.

Hierin haben die Koeffizienten die Werte

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{y_0'}{1!}, \quad a_2 = \frac{y_0''}{2!}, \quad a_3 = \frac{y_0'''}{3!}.$$

Unter Berücksichtigung von

$$y_0' = f(x_0, y_0), \quad y_0'' = [f_x + f_y y']_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}$$

sehen wir die ersten drei dieser Koeffizienten als gegeben an. Eliminiert man aus (2) den unbekannten Koeffizienten a_3 und vernachlässigt die Restglieder, so erhält man die gesuchte zweite Beziehung

$$y_1 - \frac{1}{3} h y_1' = y_0 + \frac{2}{3} y_0' h + \frac{y_0''}{6} h^2 \quad . \quad (3).$$

Zusammen mit (1) kann man aus dieser Gleichung y_1 und y_1' näherungsweise berechnen. Mit diesen berechneten Größen als Anfangswerten hätte man dann wieder ebenso y und y' an der Stelle $x_0 + 2h$ zu berechnen usw.

Die praktische Durchführung der eben auseinandergesetzten Methode wird dann fraglich, wenn (1) eine Gleichung höheren Grades oder eine transzendente Gleichung ist. Man hat ja dann bei der Auflösung wieder Näherungsmethoden anzuwenden. Dieselbe Bemerkung wäre bei II. und III. zu machen.

II. Differentialgleichungen zweiter Ordnung: 1. Methode.

Ein analoger Vorgang wie unter I. kann auch bei Auflösung der Gleichungen

$$y'' = f(x, y, y')$$

eingehalten werden. Sind die gegebenen Anfangswerte für $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0',$$

so lassen sich aus der Differentialgleichung unmittelbar berechnen

$$y_0'' = f(x_0, y_0, y_0'), \quad y_0''' = [f_x + f_y y' + f_{y'} y'']_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0 \\ y' = y_0'}}.$$

Als Unbekannte sehen wir an

$$y_1 = y(x_0 + h), \quad y_1' = y'(x_0 + h), \quad y_1'' = y''(x_0 + h).$$

Die erste der drei Gleichungen, die man zur Berechnung dieser Größen benötigt, ist die Differentialgleichung:

$$y_1'' = f(x_0 + h, y_1, y_1') \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Zu den beiden anderen Gleichungen gelangt man wieder durch Anwendung der Taylorschen Formel auf y_1, y_1', y_1'':

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 \\
&\quad + a_4 h^4 + \frac{y^V(x_0+\vartheta_1 h)}{5!} h^5 \\
h\, y_1' &= a_1 h + 2 a_2 h^2 + 3 a_3 h^3 \\
&\quad + 4 a_4 h^4 + \frac{y^V(x_0+\vartheta_2 h)}{4!} h^5 \\
h^2 y_1'' &= 2 a_2 h^2 + 6 a_3 h^3 \\
&\quad + 12 a_4 h^4 + \frac{y^V(x_0+\vartheta_3 h)}{3!} h^5
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Bekannt sind hierin

$$a_0 = y_0, \quad a_1 = \frac{y_0'}{1!}, \quad a_2 = \frac{y_0''}{2!}, \quad a_3 = \frac{y_0'''}{3!},$$

während der Koeffizient $a_4 = \frac{y_0^{IV}}{4!}$ unbekannt ist. Durch Elimination desselben aus (5) bekommt man mit Vernachlässigung der Restglieder die zwei noch fehlenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
y_1 - {}^1/_{12}\, h^2 y_1'' &= y_0 + y_0' h + {}^5/_{12}\, y_0'' h^2 + {}^1/_{12}\, y_0''' h^3 \\
y_1' - {}^1/_3\, h\, y_1'' &= y_0' + {}^2/_3\, y_0'' h + {}^1/_6\, y_0''' h^2
\end{aligned}\right\} \quad (6).$$

III. Differentialgleichungen zweiter Ordnung: 2. Methode.

Zu größerer Genauigkeit der gesuchten Lösung von

$$y'' = f(x, y, y')$$

führt der im folgenden dargelegte Rechnungsvorgang.

Bei vielen in der Praxis vorkommenden Differentialgleichungen gibt es einen ausgezeichneten Wert von x, für den die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung der Lösung $y(x)$ eine einfache Bauart besitzen. Es sei dies etwa für die Stelle $x = x_0$ der Fall. Dann liegt es nahe, beim ersten Schritt etwa die Potenzreihenentwicklung zunächst zur Berechnung von

$$y(x_0 + h), \quad y'(x_0 + h), \quad y''(x_0 + h)$$

zu benutzen und die Größen

$$y(x_0 + 2h), \quad y'(x_0 + 2h), \quad y''(x_0 + 2h)$$

als Unbekannte anzusehen. Benutzt man die Abkürzungen

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_0 + h) = y_1, \quad y(x_0 + 2h) = y_2$$

sowie entsprechende Bezeichnungen für die Ableitungen, so hat man die Größen

$$y_0,\ y_0',\ y_0'' \quad \text{und} \quad y_1,\ y_1',\ y_1''$$

als gegeben, y_2, y_2', y_2'' als gesucht zu betrachten.

Nun entwickle man nach der Taylorschen Formel die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
y_0 + y_2 &= 2 a_0 + 2 a_2 h^2 + 2 a_4 h^4 \\
&\quad + 2 a_6 h^6 + R_7 h^7 \\
-h(y_0' - y_2') &= 4 a_2 h^2 + 8 a_4 h^4 \\
&\quad + 12 a_6 h^6 + \bar{R}_7 h^7 \\
h^2 (y_0'' + y_2'') &= 4 a_2 h^2 + 24 a_4 h^4 \\
&\quad + 60 a_6 h^6 + \bar{\bar{R}}_7 h^7
\end{aligned}\right\} \ldots (7).$$

Die Koeffizienten sind:

$$a_0 = y_1, \quad a_2 = \frac{y_1''}{2!}, \quad a_4 = \frac{y_1^{IV}}{4!}, \quad a_6 = \frac{y_1^{VI}}{6!}.$$

Jetzt eliminiert man a_4 und a_6 aus (7), indem man die Gleichungen der Reihe nach multipliziert mit:

$$24, \quad -9, \quad 1$$

und addiert. Man bekommt unter Vernachlässigung der Restglieder für die Unbekannten zunächst die folgende Gleichung:

$$24(y_0 + y_2) + 9h(y_0' - y_2') + h^2(y_0'' + y_2'') = 48 y_1 + 8 y_1' h^2 \ldots (8).$$

Eine zweite Beziehung gewinnt man, indem in entsprechender Weise wie in (7) die folgenden Ausdrücke entwickelt:

$$\left.\begin{aligned}
y_2 - y_0 &= 2 a_1 h + 2 a_3 h^3 \\
&\quad + 2 a_5 h^5 + R_7 h^7 \\
h(y_2' + y_0') &= 2 a_1 h + 6 a_3 h^3 \\
&\quad + 10 a_5 h^5 + \bar{R}_7 h^7 \\
h^2 (y_2'' - y_0'') &= 12 a_3 h^3 \\
&\quad + 40 a_5 h^5 + \bar{\bar{R}}_7 h^7
\end{aligned}\right\} \ldots (9).$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (9) mit 15, -7, 1 und Addition eliminiert man a_3 und a_5 und erhält mit Vernachlässigung der Restglieder die Beziehung

$$15(y_2 - y_0) - 7h(y_2' + y_0') + h^2(y_2'' - y_0'') = 16 y_1' h \ldots (10).$$

Mit der aus der Differentialgleichung folgenden Beziehung

$$y_2'' = f(x_0 + 2h,\ y_2,\ y_2')$$

zusammen ermöglichen die Beziehungen (8) und (10) die Berechnung der Unbekannten y_2, y_2', y_2''. Vernachlässigt sind dabei Glieder siebenter und höherer Ordnung.

Bezüglich numerischer Durchführung von Beispielen verweise ich auf die in der Einleitung genannte Abhandlung.

Prag. P. Funk. 776

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik. 11. Aufl., dritter Band. Erste Hälfte. Physikalische, chemische und technische Thermodynamik (einschl. Wärmeleitung). Bearbeitet von ARNOLD **EUCKEN,** Breslau. Mit 575 Figuren. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1926. XVIII + 1185 S. Preis geh. 63 M., geb. 68 M.

In stattlichem Umfange liegt die erste Hälfte des III. Bandes des bekannten grundlegenden Lehrbuches der Physik vor, gegenüber dem das gleiche Gebiet umfassenden Bande der 10. Auflage, neuorientiert und völlig neu bearbeitet. Dies war bedingt durch die seither gewonnene Aenderung und Erweiterung der Grundauffassung und durch die Zunahme der

Forschungsergebnisse und Erkenntnisse auf diesem Gebiet.

Das vorliegende Werk enthält die thermodynamisch-phänomenologische Behandlung des Gebietes der Wärmelehre. Sein Inhalt geht aus von den experimentellen Methoden (Thermometrie (Verf. R. Suhrmann), Kalorimetrie (A. Eucken) und den Grundgesetzen der Wärmelehre (1. und 2. Hauptsatz) (A. Eucken), geschichtliche Entwicklung der thermodynamischen Prinzipien). (A. Eucken.)

Der weitere Inhalt ist in zwei Teile gegliedert: I. Systeme gleichförmiger Temperatur und II. Systeme ungleichförmiger Temperatur.

Der erste Teil umfaßt:

Homogene Einkomponentensysteme (thermische Zustandsgleichung, kalorische Zustandsgleichung I und II). (A. Eucken, A. Magnus, G. Hoffmann, F. Pollitzer.)

Heterogene Einkomponentensysteme (Gleichgewicht zwischen verschiedenen Aggregatzuständen, Energieänderungen und Geschwindigkeitsphänomene beim Phasenübergang, Grenzflächenerscheinungen). (F. Sauerwald, A. Eucken.)

Homogene Mehrkomponentensysteme (Mischungen und Lösungen, Gleichgewicht in Gasgemischen und Lösungen, zeitliche Veränderungen vor der Einstellung des Gleichgewichts). (A. Eucken, A. Magnus, H. Klinkhardt, E. Donath.)

Heterogene Mehrkomponentensysteme (Gleichgewicht heterogener Systeme, thermodynamische Behandlung ausgewählter heterogener Systeme, Grenzflächenerscheinungen, Umwandlungs- und Reaktionsgeschwindigkeiten.) (F. Sauerwald, A. Eucken.)

Der zweite Hauptteil (Systeme ungleichförmiger Temperaturen) gliedert sich in die Abschnitte:

Thermische und kalorische Vorgänge ohne Berücksichtigung einer möglichen Arbeitsleistung (Gleichgewicht und chemische Reaktionsgeschwindigkeit bei ungleichförmiger Temperatur, Wärmeleitung). (A. Eucken, M. Jakob.)

Wärmetechnische Vorgänge mit Arbeitsabgabe (Grundlagen der Wärmekraftmaschinen, Wärmekraftmaschinen mit äußerer und innerer Verbrennung). (G. Zerkowitz.)

Wärmetechnische Maschinen mit Arbeitsaufwand (Verdichter, Kältemaschinen einschl. Wärmepumpe, Zerlegung von Gasgemischen mit Arbeitsaufwand). (G. Zerkowitz, F. Pollitzer.)

Den Schluß bildet ein Abschnitt über die Physiologie der Wärme. (U. Ebbecke.)

Verglichen mit dem das gleiche Gebiet umfassenden Band der 10. Auflage zeigt das neue Buch somit eine völlig neuartige Gliederung des Stoffes. Besonders beachtenswert ist die gesonderte Behandlung der thermodynamischen Arbeitsvorgänge.

Es ist nicht möglich, an dieser Stelle auf alle Neuerungen und Verbesserungen gegenüber der früheren Auflagen hinzuweisen. In umfassender Weise enthält der Band eine Fülle von Material, ohne jedoch weitschweifig und ermüdend zu werden und dadurch den Charakter eines Lehrbuches zu verlieren.

Vorausnehmend muß betont werden, daß es im vorliegenden Fall mit bestem Erfolg unternommen wurde, alles vorhandene Versuchsmaterial möglichst lückenlos zu sichten und zu verarbeiten.

In allen Kapiteln sind die Teile mit rein geschichtlichem Interesse gekürzt oder weggelassen. Nur dadurch war es möglich, den Stand der Erkenntnis auf dem ausgedehnten Gebiete der Thermodynamik in dieser vorbildlichen Weise in einem erträglichen Umfange zu behandeln und einen geschlossenen, vollständigen Ueberblick zu geben.

So enthält z. B. der Abschnitt über Thermometrie trotz seiner Verkürzung auf $^2/_3$ des früheren Umfanges fast lückenlos kritisch gesichtet alle neueren Methoden zur richtigen Temperaturmessung.

Die in der Hauptsache von Eucken bearbeitenden thermodynamischen Abschnitte sind eine glückliche Vereinigung von theoretischer Physik mit Experimentalphysik und geben eine Betrachtung des ausgedehnten Gebietes von höherer Warte. Sie enthalten — in vorbildlicher Weise zusammengefaßt — eine beinahe über die Grenzen eines Lehrbuches hinausgehende Fülle von wissenschaftlich wertvollem Material, dessen Sichtung und Einordnen nur einer sicheren Hand gelingen konnte.

In dem Abschnitt über die Wärmeleitung zeigen sich erneut die hohen wissenschaftlichen und pädagogischen Fähigkeiten des Verfassers M. Jakob. Im Rahmen des Handbuches bleibend, gibt er ein klares, vollständiges Bild des Standes der Forschung auf diesem Gebiete.

Besondere Beachtung verdienen die neu aufgenommenen, von Zerkowitz und Pollitzer bearbeiteten technisch-physikalischen Abschnitte über die Wärmekraftmaschinen, Kompressoren und Kältemaschinen. Trotz der aufgezwungenen Kürze sind diese Gebiete in umfassender Weise behandelt und musterhaft entwickelt. Diese Beiträge sind geeignet, nicht nur für den reinen Physiker, sondern auch für den Ingenieur als Grundlage für das Einlernen in die Theorie der Wärmekraftmaschinen zu dienen.

Begrüßenswert ist die Aufnahme des Kapitels über die Physiologie der Wärme aus der Feder eines bewährten Fachmannes. Auf etwa 20 Seiten werden von U. Ebbecke die Grundanschauungen auf diesem Gebiete in einer dem Charakter des Gesamtwerkes angepaßten Art entwickelt.

Zusammenfassend muß betont werden, daß es dem Herausgeber des Buches, A. Eucken, gelungen ist, durch richtige Wahl der Mitarbeiter dem gut eingeführten Handbuch der Physik mit diesem Bande eine Neuauflage geschaffen zu haben, die alle Erwartungen erfüllt und eine wertvolle Bereicherung der Fachliteratur bedeutet.

München. Reiher. 794

Dr. MARCEL **GROSSMANN,** Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Darstellende Geometrie für Maschineningenieure. Mit 260 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1927. VIII + 236 S. Preis 15 M, geb. 16,50 M.

Dieses Lehrbuch der darstellenden Geometrie, das sich — verglichen mit seinen Rivalen — einer lobenswerten Kürze erfreut und dennoch eine reiche und geschickte Stoffauswahl bringt, kann vor allem den jungen Studenten der technischen Hochschulen sehr empfohlen werden. Denn an die Jugend, so betont der Verfasser im Vorwort, wendet es sich in erster Linie und verzichtet darum »auf allen gelehrten Apparat, auf historische Nachweise und Bemerkungen«. Und ich glaube, daß auch der junge Mathematiker, der gewöhnlich durch eine Fülle technischer Spezialitäten von dieser geometrischen Disziplin abgeschreckt wird, gerade an Hand der vortrefflichen Zeichnungen dieses Buches, die nicht jede Konstruktionslinie, jedes Pünktchen bringen, viel lernen kann. Freilich muß man dabei — Titel und Zweck des Buches rechtfertigen das — auf manche wichtigen und interessanten Dinge verzichten, so auf die Zentralprojektion und ihre Anwendungen. Vielleicht hätte auch — aber das ist eine Sache des Geschmacks — die axonometrische Darstellung etwas genauer und nicht allzu knapp begründet werden können.

Die ersten vier Kapitel, etwa ein Drittel des Buches, behandeln Normal- und axonometrische Projektion. Das 5. Kapitel gibt die wichtigsten Begriffsbildungen über Kurven und Flächen, sehr anschaulich, wenngleich etwas skizzenhaft. Dann folgen im 6. bis 10. Kapitel spezielle Flächen mit vielen technischen Anwendungen: Kreiszylinder und Kreiskegelflächen, graphische, topographische Flächen, allgemeine Kegelflächen und Rotationsflächen. Die Regelflächen und ihre Anwendung zur Formgebung der Flügelflächen von Propellern sind in den nächsten vier Kapiteln sehr interessant und sorgfältig dargestellt. Endlich erscheinen die Schraubenlinien und Schraubenflächen in allen Variationen, um im 18. Kapitel nur noch einer hübschen Spezialuntersuchung über Schlagherzen von Webstühlen Platz zu machen.

Es sei freilich nicht verschwiegen, daß der Mathematiker durch seltsame Stilistik bei der Formulierung wichtiger Grundbegriffe nicht angenehm berührt wird. So heißt es bei Einführung des Dualismus zwischen Punkten und Geraden in der Ebene: »Die Gleichartigkeit des Eintretens der Punkte und Geraden in die eine Figur, der Geraden bezw. Punkte in die andere ist in die Augen springend und nicht zu überhören.« Von solchen Dingen abgesehen ist aber überall Klarheit und Uebersichtlichkeit im räumlichen Schauen und Konstruieren erstrebt und erreicht, und noch einmal sei betont, daß die Figuren und die Ausstattung des Buches mustergültig sind.

Berlin. F. Rehbock. 813

H. **SCHWERDT,** Studienrat am Falk-Realgymnasium und Dozent an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin. Einführung in die praktische Nomographie. Mit 62 Abb. im Text. Bd. 6 der Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Bücherei. Verlag Otto Salle, Berlin 1927. VI + 122 S. Preis geb. 3 M.

Der Verfasser, der vor einigen Jahren das »Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischer Grundlage« veröffentlichte, bringt in diesem neuen kleinen Leitfaden eine anschauliche und elegante Einführung in die Nomographie, die besser ist als viele der Bücher, die in den letzten Jahren über dieses junge Gebiet erschienen sind. Zu begrüßen sind die »Anregungen«. Man gewinnt einen guten Ueberblick über die geometrische Problemstellung und ihre Lösungsmöglichkeiten.

Berlin. F. Rehbock.

Dr. M. **HAUPTMANN,** Studienrat an der Höh. Maschinenbauschule der Stadt Leipzig. Mathematische Aufgaben aus der Technik. 89 Aufgaben mit 350 Unteraufgaben und Lösungen. Mit 115 Abb. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1927. IV + 111 S. Preis kart. 3,60 M.

Für Ingenieure und Techniker sind hier eine Reihe recht guter, nicht erdachter, sondern aus dem Leben, der Praxis genommener Aufgaben zusammengestellt. Es ist nicht die Rede von Fachwerken schlechthin, sondern von der Kaiser-Wilhelm-Brücke über die Wupper, von den Helmen der Domtürme in Halberstadt. Das erhöht den Reiz des Buches. Ich vermisse bei vielen Aufgaben die Ergebnisse, die für den Selbstarbeitenden eine Kontrollmöglichkeit bieten.

Berlin. F. Rehbock.

L. **BALSER,** Oberstudienrat an der Liebigs-Oberrealschule in Darmstadt. Sphärische Trigonometrie, Kugelgeometrie in konstruktiver Behandlung. Mathematisch-physikalische Bibliothek Nr. 69. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1927. 51 S. Preis 1,20 M.

Das Büchlein behandelt in geschickter Weise zur Einführung in die darstellende Geometrie eine Spezialaufgabe: Die Abbildung der Kugel und der Kugelgeometrie auf die Ebene.

Berlin. F. Rehbock. 814

Dipl.-Ing. JEAN **SPIELREIN,** Professor an der Technischen Hochschule in Moskau. Lehrbuch der Vektorrechnung nach den Bedürfnissen in der technischen Mechanik und Elektrizitätslehre. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 62 Textabbildungen und einer Formelsammlung. Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart 1926. XVI + 334 S. Preis geb. 27 M.

Das jetzt in zweiter Auflage vorliegende Buch von Spielrein ist das umfangreichste und

ausführlichste Lehrbuch der Vektor- und Tensorrechnung, das wir bisher besitzen. In dem ersten, etwa 260 Seiten umfassenden Teil werden alle Lehrsätze und Formeln der Vektorrechnung unter Ausführung zahlreicher Anwendungsbeispiele abgeleitet und durch eine lange Reihe von Aufgaben mit beigefügten Lösungen ergänzt. Die Auffassung, die der Verfasser vertritt, entspricht dem in der Einleitung dargelegten Standpunkt, die Begriffe und Rechenmethoden der Vektorlehre im Sinne der Anwendungen, die Physiker und Ingenieure von ihr machen, zu entwickeln ohne Rücksicht auf die immer wieder von Mathematikern geltend gemachte angebliche Ueberlegenheit invariantentheoretischer oder ähnlicher Betrachtungsweisen. Daß selbst Felix Klein hier für die Bedürfnisse der Anwendungen kein richtiges Verständnis aufzubringen vermochte, konnte nicht verhindern, daß die anschaulich-geometrische Vektor-Auffassung im Sinne der Physiker sich in den letzten Jahrzehnten ganz allgemein durchgesetzt hat. Nur in einem nebensächlichen Punkt sieht sich der Referent im Gegensatz zum Verfasser. Dieser hat für die Schreibung der Vektoren die vom AEF vorgeschlagene Art gewählt, bei der das Vektor-Produkt durch eckige Klammern bezeichnet wird. Da dies bekanntlich bei komplizierteren Formeln nicht ausreicht, muß der Verfasser zu einem besonderen Zeichen der »Unterklammerung« Zuflucht nehmen, das sowohl dem Aussehen nach wie auch drucktechnisch gewiß nicht als einwandfrei bezeichnet werden kann.

Hinsichtlich des zweiten Teiles des Spielreinschen Buches, der die Affinor-Rechnung behandelt, ist zu sagen, daß hier der Verfasser noch einigermaßen unter dem Einfluß der formalen Auffassung steht, die die anschauliche Wirklichkeit des Tensors nicht recht zur Geltung kommen läßt. Er geht, wie dies ja allgemein üblich ist, von dem Begriff der linearen Funktion eines Vektors aus, ohne zu merken, daß er damit im Gebiete der Gebilde zweiter Stufe eben das tut, was er im Gebiete der Vektorrechnung mit Recht verwirft. Daß der Tensor (die Dyade, der Affinor) ein ebenso selbständiges und für sich existierendes geometrisches Gebilde ist wie der Vektor, kommt bei dieser Darstellungsweise dem Leser nicht zum Bewußtsein. Immerhin muß gesagt werden, daß dieser zweite Teil des Spielreinschen Werkes von den bestehenden Darstellungen der Dyadenrechnung vielleicht noch die für den Praktiker verständlichste ist.

Der Wert des Buches wird erhöht durch ein besonders beigefügtes, 40 Seiten umfassendes Heft, das eine Formelsammlung für den praktischen Bedarf enthält. Mises. 826

Dr. FRANZ **PRÁŠIL,** Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich. Technische Hydrodynamik. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 109 Abb. im Text. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. IX + 303 S. Preis geb. 24 M.

Das in 2. Auflage vorliegende Buch nimmt eine besondere Stellung unter den Lehrbüchern der Hydromechanik ein. Es enthält vorwiegend Beispiele von ebenen Potentialbewegungen, die mit verschiedenen Aufgaben der Technik in Zusammenhang stehen. In anschaulicher, durch zahlreiche ausgezeichnete Abbildungen ergänzter Darstellung gibt der Verfasser einen Abriß der Theorie idealer Flüssigkeiten und verbreitet sich namentlich über die Methode der konformen Abbildung und ihre Anwendung auf die Probleme der Strömung in Kreiselrädern. Jedes Beispiel wird durch sorgfältig ausgearbeitete Stromlinienbilder veranschaulicht. Das Buch wird jedem, der sich mit Turbinentheorie und ähnlichen Fragen beschäftigt, von Nutzen sein, wenn auch vieles, was darin über den Einfluß von Bewegungswiderständen oder sonst über die Abweichungen der Wirklichkeit von der Theorie idealer Flüssigkeiten gesagt wird, mit den neueren Forschungen auf diesem Gebiet nicht ganz in Einklang steht. Mises. 827

Dr. THEODOR **PÖSCHL,** o. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag. Berechnung von Behältern nach neueren analytischen und graphischen Methoden. Für Studierende und Ingenieure und zum Gebrauche im Konstruktionsbüro. Zweite, vollständig umgearbeitete und erweiterte Auflage, mit Benutzung der gemeinsam mit Prof. Dr. K. v. Terzaghi bearbeiteten ersten Auflage. Mit 71 Textabb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. VI + 208 S. Preis geb. 15,60 M.

Das Buch enthält zunächst einen Abriß der Elastizitätstheorie dünner Schalen und Platten von axial symmetrischer Gestalt mit besonderer Berücksichtigung der praktischen Anwendung auf die Berechnung von Behältern. In übersichtlicher und nicht allzu schwer faßlicher Darstellung werden fast alle hierher gehörenden Arbeiten der neueren Zeit berücksichtigt und teilweise ausführlich besprochen.

Der zweite Teil des Buches enthält in analytischer und graphischer Behandlung die Berechnung von zylindrischen Behältern mit lotrechter Achse, die durch Wasserdruck belastet sind und veränderliche Wandstärke besitzen. Hierbei wird die Ritzsche Methode eingehend entwickelt. Mises. 828

Dr. GOTTFRIED **RÜCKLE,** Praxis des Zahlenrechnens. Rom-Verlag, R. Otto Mittelbach, Charlottenburg 1925. 126 S.

Der durch seine erstaunlichen Leistungen im Kopfrechnen bekannte Verfasser gibt einen kurzen Abriß der Methoden, die er bei der Ausführung von Zahlenrechnungen benutzt. Wenn auch das meiste, was hier vorgeschlagen wird, dem durchschnittlich veranlagten Rechner für Ausführung im Kopf zu schwierig erscheinen wird, gibt doch das Buch zahlreiche wertvolle Winke auch für die schriftliche Behandlung mannigfacher Aufgaben, beispielsweise für die Auflösung transzendenter Gleichungen. Auch vieles Grundsätzliche über die Methodik des

Rechnens und die Frage der Gedächtnisleistungen wird auf allgemeineres Interesse stoßen.

Mises. 829

PAUL **APPEL,** Membre de l'Institut, Recteur honoraire de l'université de Paris. **Traité de mécanique rationelle. Tome cinquième: Elements de calcul tensoriel. Applications géométriques et mécaniques.** Avec la collaboration de RENÉ **THIRY,** Professeur à l'université de Strasbourg. Gauthier-Villars et Cie, Paris 1926. VI + 198.

Im Rahmen seines groß angelegten Lehrbuchs der theoretischen Mechanik gibt der greise Verfasser in dem vorliegenden 5. Band eine Einleitung in die mathematischen Grundlagen der Relativitätstheorie, indem er in großer algebraischer Allgemeinheit die Tensortheorie des mehrdimensionalen Raumes behandelt Das Buch, das sich durch seine elegante Darstellung auszeichnet, nimmt auf die verschiedenen Richtungen, nach denen die Grundlegung der Einsteinschen Theorie sich entwickelt hat, namentlich auch auf Weyl, Eddington und Levi-Civita Rücksicht. Als Lehrbuch der Tensorrechnung des dreidimensionalen Raumes kommt der vorliegende Band nicht in Frage.

Mises. 836

H. **GLAUERT,** M. A. Fellow of Trinity College Cambridge. **The elements of Aerofoil and Airscrew Theory.** University Press Cambridge 1926. 228 S.

Nach einer kurzen Einleitung in die Theorie der ebenen Bewegung bringt das Buch eine ausführliche Darstellung der Auftriebstheorie des »unendlich breiten« Tragflügels, wobei es sich im wesentlichen auf eine Wiedergabe der aus den Originalabhandlungen von Kutta, Joukowski, v. Mises u. a. bekannten Ergebnisse beschränkt. In gleicher Weise wird ein Abriß der Prandtlschen Auftriebs- und Widerstandstheorie unter Beschränkung auf ihre Hauptzüge gegeben. Die Schlußkapitel behandeln die Luftschraube. Als leicht lesbare lehrbuchmäßige Darstellung der modernen Aufgabenkreises der Aerodynamik ist das Buch warm zu empfehlen.

Mises. 837

Nach Arbeiten von Staatsrat Dr.-Ing. e. h. ALEXANDER **KOCH,** s. Zt. Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, herausgegeben von Dr.-Ing e. h. MAX **CARSTANJEN. Von der Bewegung des Wassers und den dabei auftretenden Kräften.** Grundlagen zu einer praktischen Hydrodynamik für Bauingenieure. Nebst einer Auswahl von Versuchen Kochs im Wasserbau-Laboratorium der Darmstädter Technischen Hochschule zusammengestellt unter Mitwirkung von Studienrat Dipl.-Ing. L. Hainz. Mit 331 Abb. im Text und auf 2 Tafeln sowie einem Bildnis. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. XII + 228 S. Preis geb. 28,50 M.

Das Buch, das aus dem Nachlaß des verstorbenen Darmstädter Professors Koch herausgegeben wurde, gehört in das Gebiet der Hydraulik im älteren Sinne dieses Wortes. Aehnlich wie dies z. B. in der »Hütte« Jahrzehnte lang der Fall war, werden in der Einleitung die dreidimensionalen Eulerschen Gleichungen achtungsvoll vorgeführt, ohne daß sie weiterhin irgend welche Verwendung finden. Den eigentlichen Inhalt des Buches bilden vielmehr Untersuchungen, die mit einigen elementaren Grundvorstellungen der Mechanik operieren und damit den schwierigsten Problemen der Flüssigkeitsströmung beizukommen suchen. Das Haupthilfsmittel dabei ist natürlich die Heranziehung sogenannter empirischer Koeffizienten an allen entscheidenden Stellen. Selbst dort, wo die Theorie ausgezeichnete Uebereinstimmung mit der Beobachtung ergibt, wie beispielsweise bei der Berechnung der Einschnürungszahl an scharfen Austrittsöffnungen, wird die Möglichkeit einer theoretischen Berechnung nicht einmal erwähnt. Von Nutzen werden manche experimentelle Angaben des Buches sein, das im übrigen wohl mehr historisch gewertet werden muß.

Mises. 838

Dr.-Ing. L. **GÜMBEL,** weil. o. Professor der Technischen Hochschule zu Berlin. **Reibung und Schmierung im Maschinenbau.** Aus dem Nachlaß bearbeitet von Dr. E. **EVERLING,** a. o. Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin. Mit 37 Abb. Verlag von M. Krayn, Berlin 1925. VII + 240 S. Preis brosch. 12 M.

Aus dem Nachlaß des allzu früh verstorbenen Prof. Gümbel hat der Herausgeber ein unvollständig gebliebenes Ms., das mehrere Arbeiten des Verstorbenen zusammenfassen sollte, für den Druck bearbeitet. Man wird ihm dafür Dank wissen, da es bisher an einer ausführlichen Monographie über die Fragen der Reibung gefehlt hat. Der Verfasser, der durch eine gewisse Originalität in der Auffassung mechanischer Probleme bekannt war, gibt eine stark subjektive Darstellung von der Entwicklung unserer Erkenntnis über die Reibung fester und flüssiger Körper und wendet sich dann einer ausführlichen Ableitung der hydrodynamischen Theorie zu. Dabei legt er wieder den größten Wert auf einige aus seinen früheren Abhandlungen bekannte Abweichungen von der sonst üblichen Auffassung. Sorgfältiges Eingehen auf Versuchsergebnisse und Erfahrungen im praktischen Betriebe verleiht dem Buch erhöhten Wert.

Mises. 839

Dr. W. **v. IGNATOWSKY,** Professor an der Universität in Leningrad. **Die Vektoranalysis und ihre Anwendung in der theoretischen Physik.** Teil I. Die Vektoranalysis. Mit 27 Textfiguren. Dritte umgeänderte Auflage. Samml. Math. Phys. Lehrb. 6, 1. IX + 110 S. Preis 5,60 M. — Teil II. Anwendung der Vektoranalysis in der theoretischen Physik. Mit 14 Textfiguren. Dritte, neubearbeitete Auflage. Samml. Math. Phys. Lehrb. 6, 2. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1926. IV + 120 S. Preis 5,60 M.

Unter den kleineren Lehrbüchern der Vektorrechnung, die vor allem auf die Bedürfnisse

der Anwendungen zugeschnitten sind, scheint mir das jetzt in dritter Auflage vorliegende das Beste zu sein. Das erste Bändchen stellt die Theorie in ziemlich einwandfreier Weise dar. Nur das etwas knapp gefaßte und etwas unorganisch angefügte letzte Kapitel über Tensoren würde noch eingehendere Umarbeitung verdienen. Im zweiten Bändchen werden die Anwendungen auf Mechanik und Elektrizitätslehre ausführlich und recht verständlich dargestellt, wenn auch nicht immer die einfachsten Gedankengänge für die einzelnen Ableitungen gefunden sind. Mises. 840

Dr.-Ing. FRIEDRICH **PROEGER,** Diplom-Ingenieur. Die Getriebekinematik als Rüstzeug der Getriebedynamik. Mit 114 Abb. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 285. 74 S. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin 1926. Preis br. 6,70 M.

Der erste Teil der vorliegenden Schrift behandelt die Ermittlung von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ebener Kurbelgetriebe mit den Hilfsmitteln der Vektorrechnung und zeichnerischer Konstruktion. Der zweite Teil, den der Verf. als Dynamik bezeichnet, entspricht dem, was sonst Kinetostatik heißt. Es werden die Beziehungen zwischen dem Beschleunigungszustand der Getriebe und den Gelenkreaktionen ermittelt. Referent kann nicht finden, daß die Ausführungen wesentlich über das hinausgehen, was etwa im Wittenbauerschen Buch[1]) und in den grundlegenden Arbeiten von K. Heun enthalten ist.

Mises. 841

M. **TRAMER,** Dr. phil. et med., Priv.-Doz. der Univ. Bern, Direktor der kant. Heil- und Pflegeanstalt Rosegg, Solothurn. Technisches Schaffen Geisteskranker. Mit 58 Abb. Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin 1926. 246 S. Preis geh. 12 M, geb. 14,50 M.

Die Fortschritte der theoretischen und praktischen Psychologie führen zu immer neuer Erweiterung ihres Arbeits- und Forschungsgebietes. So wundert man sich nicht mehr, in einem psychiatrischen Werke Abbildungen und Formeln zu finden, wie sie sonst in einem Lehrbuch der elementaren Mechanik stehen. Der Verfasser gibt nämlich in der Einleitung eine Uebersicht über die in Frage kommenden mechanischen Grundgesetze. In der Hauptsache handelt es sich bei den pathologischen Erfindern stets um das Perpetuum mobile. Der Verfasser geht auf den Begriff der erfinderischen Tätigkeit, auf die Klassifikation von Erfindungen usw. ausführlich ein. Das Ziel seines Buches soll wohl nebenbei sein, durch die Untersuchung der krankhaft ausgearteten Fälle einen gewissen Einblick in die Psychologie auch der gesunden Erfindungstätigkeit zu vermitteln, ähnlich wie dies auf dem Gebiete des künstlerischen Schaffens von Prinzhorn versucht worden ist. Es ist nur schwer möglich, darüber zu urteilen, ob und wie weit das Ziel erreicht wurde — auch wenn man als Herausgeber einer Zeitschrift unfreiwilliger Empfänger der sonderbarsten Produktionen und daher mit mancherlei Abstufungen zwischen gesunder und krankhafter Leistung nicht unvertraut ist. Als einen ersten Versuch, die Bedingungen mathematisch-mechanischer Gedankenarbeit psychologisch zu erfassen und mit den Mitteln der modernen psychiatrischen Forschung zu untersuchen, muß das Buch von Tramer begrüßt werden.

Mises. 841

[1]) F. Wittenbauer, Graphische Dynamik, Berlin 1923; vergl. diese Zeitschr. Bd. 4 (1924), S. 440.

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt E. V. 1926. (Berichte u. Abhandl. d. WGL., 14. Heft). R. Oldenbourg, München u. Berlin 1926. 154 S. Preis geh. 16 M.

Der Schlüssel zum Weltgeschehen. Monatsschrift f. reine und angew. Welteiskunde. Herausg. Hans Wolfgang Behm. R. Voigtländer, Leipzig 1927. Heft 1, 36 S.

H. **BUCHHOLZ,** Das Problem der Kontinuität; Die Unmöglichkeit absoluter metrischer Präzision. 133 S. E. **BERGFELD,** Die Axiome der Euklidischen Geometrie psychologisch und erkenntnistheoretisch untersucht. (Neue psychol. Studien, herausgeg. v. F. Krüger, III. H. 1 u. 2.) C. H. Becksche Verlagsbuchhandl., München 1927.

NACHRICHTEN

Carl Runge †. Wie schon berichtet, ist am 3. Januar 1927 Carl Runge, emer. Prof. der angewandten Mathematik an der Universität Göttingen gestorben. Er hat nur kurz seinen siebzigsten Geburtstag überlebt, anläßlich dessen an dieser Stelle[1]) Hr. Trefftz seine wissenschaftliche Bedeutung und Persönlichkeit in ausführlicher Weise gewürdigt hat. Wir glauben das Andenken des großen Meisters der angewandten Mathematik nicht besser ehren zu können, als indem wir ein vollständiges Verzeichnis der von C. Runge verfaßten Arbeiten veröffentlichen. Für die sorgfältige Zusammenstellung ist die Schriftleitung Hrn. Prof. Courant in Göttingen zu Dank verpflichtet.

[1]) Bd. 6 (1926), S. 423/424.

Bücher und Referate.

Separation und Approximation der Wurzeln. Encycl. d. math. Wiss. I, 1899.

Praxis der Gleichungen. Samml. Schubert XIV (Leipzig 1900), II. Aufl. 1923.

Maß und Messen. Encycl. d. math. Wiss. V, 1903.
Theorie und Praxis der Reihen. Samml. Schubert XXXII (Leipzig 1904).
Analytische Geometrie der Ebene. Leipzig 1908.
Graphical methods (Columbia University lectures). New York 1913.
Graphische Methoden. (Leipzig 1914.) II. Aufl. 1919.
Vektoranalysis I. Die Vektoranalysis des dreidimensionalen Raumes. (Leipzig 1919.)
— — Translated by H. Lewy. New York 1923.
Die Seriengesetze in den Spektren der Elemente. Encycl. d. math. Wiss. V.
mit F. Emde, Rechnungsformular zur Zerlegung einer empirisch gegebenen Funktion in Sinuswellen. Nebst einer Erläuterung von C. Runge. (Braunschweig 1913.)
mit H. König, Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin 1923.
mit Fr. A. Willers, Numerische und graphische Integration, Quadratur und gewöhnlicher partieller Differentialgleichungen. Encycl. d. math. Wiss. II, 1915.

Abhandlungen.

Dissertation: Krümmung, Torsion und geodätische Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Kurven. 1880.
Die linearen Relationen zwischen den verschiedenen Subdeterminanten symmetrischer Systeme. Crelle 93, 1882.
Algebraische Ableitung der Multiplikation von cos am u. Crelle 94, 1883.
Ueber den Zusammenhang der Werte einer algebraischen Funktion. ib. 97, 1884.
Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Acta 6, 1885.
Entwickelung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Summen von rationalen Functionen der Coefficienten. Acta 6, 1885.
Zur Theorie der analytischen Functionen. Acta 6, 1885.
Ueber die auflösbaren Gleichungen von der Form $x^5 + ux + v = 0$. ib. 7, 1885.
Ueber die Darstellung willkürlicher Functionen. ib. 7, 1885.
Ueber die Zerlegung ganzzahliger Functionen in irreducible Factoren. Crelle 99, 1886.
Ueber ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen. ib. 100, 1887.
On the harmonic series of lines in the spectra of the elements. Rep. Brit. Assoc. 1888.
On a method of discriminating real from accidental coincidences between the lines of different spectra. Phil. Mag (5), 29, 1890.
Der Schreibersche Satz. Zs. f. Vermeßwesen, 19, 1890.
Ueber eine numerische Berechnung der Argumente der cyclischen, hyperbolischen und elliptischen Functionen. Acta 15, 1891.
Ueber angewandte Mathematik. Math. Ann. 44, 1894.
Das Rückwärtseinschneiden mit Coordinaten. Zs. f. Vermeßwesen 23, 1894.
Ueber die Bestimmung der geographischen Breite auf photographischem Wege. Zs. f. Vermeßwesen 23, 1894.
The determination of latitude and longitude by photography (Uebersetzung obiger Arbeit). Nature 50, 1894.
Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. Math. Ann. 46, 1895.
Das Stangenplanimeter. Zs. f. Vermeßwesen 24, 1895.
Die Wellenlängen der ultravioletten Aluminiumlinien. Wied. Ann. 55, 1895.
Ueber die Bestandteile des Cleveit-Gases. Berl. Acad. 1895.
On the Constituents of Cleveite Gas (Uebersetzung). Phil. Mag. 40, II, 1895.
Ueber die Differentiation empirischer Functionen. Zs. f. M. u. Phys. 42, 1897.
Zur Methode der kleinsten Quadrate. Zs. f. Vermeßwesen 27, 1897.
Ueber die Ortsbestimmung auf See. Zs. f. Vermeßwesen 26, 1898.
Ueber die Verwandtschaft der Rückwärts- u. Vorwärts-Einschneidens. ib. 28, 1899.
Ueber ganzzahlige Gleichungen ohne Affect. Gött. Nachr. 1899.
On the deduction of increase-rates from physical and other tables. Nature 60, 1899.
Spectralanalytische Untersuchungen. Unterrbl. f. Math. 5, 1899.
On the red End of the Argon spectrum. Astroph. J. Chicago IX, 1899.
On the spectra of Krypton. ib. X, 1899.
Ueber die Vergleichung empirischer Formeln. Zs. f. Math. u. Phys. 45, 1900.
Graphische Ausgleichung beim Rückwärtseinschneiden. Zs. f. Vermeßwesen 29, 1900.
Das Spectrum des Radiums. Ann. d. Phys. (IV), 2, 1900.
Ueber empirische Functionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. Zs. f. Math. u. Phys. 46, 1902.
Der Zeemaneffekt der Serienlinien. Phys. Zs. 3, 1902.
Ueber die spectroskopische Bestimmung des Atomgewichts. ib. 4, 1903.
Ueber die Zerlegung empirisch gegebener periodischer Functionen in Sinuswellen. Zs. f. Math. u. Phys. 48, 1903.
Ueber die Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen auf graphischem Wege. ib. 48, 1903.
Ueber die elektromagnetische Maße der Elektronen. Gött. Nachr. 1903.
The spectrum of the aurora. Astrophys. J. Chicago 18, 1903.
On the relationship between spectra and atomic weights. Phil. Mag. 6, 1903.
Ueber die Formänderung eines zylindrischen Wasserbehälters durch den Wasserdruck. Zs. f. Math. u. Phys. 51, 1904.
Bemerkungen über Hennebergs Aufsatz »Zur Torsionsfestigkeit«. ib. 51, 1904.
Die Gesetzmäßigkeit in den Spectren der Elemente. Zs. f. Elektrochemie 10, 1904.
Die thermodynamischen Beziehungen. Boltzmann-Festschrift 1904.
Methode der Zerlegung in Sinuswellen. Elektrotechn. Zs. 1905.
Ueber die Leibnizsche Rechenmaschine. Verh 3. int. Math. Kongr. Heidelberg 1905.

Ueber die Zerlegung einer empirischen Function in Sinuswellen. Zs. f. Math. u. Phys. 52, 1905.
Numerische Berechnung der Hauptachsen einer Fläche zweiter Ordnung. ib. 52, 1905.
Ueber graphische Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung. Jahresber. D. M. V. 16, 1907.
Ueber die numerische Auflösung totaler Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1905.
Ueber die Zerlegung von Spectrallinien im magnetischen Felde. Phys. Zs. 8, 1907.
Radioaktivität der Luft auf offnem Meere. Gött. Nachr. 1907.
Ueber die Spectren der Alkalien. Phys. Zs. 9, 1908.
Die Zerlegung einer empirisch gegebenen periodischen Function in Sinuswellen. Gött. Nachr. 1908.
Ueber eine Methode, die partielle Differentialgleichung $\Delta u =$ const. numerisch zu integrieren. Zs. f. Math. u. Phys. 56, 1908.
Ueber die Ortsbestimmung im Ballon. Gött. Nachr. 1909.
A hydrodynamic problem treated graphically. Am. Math. Soc. Bull (2) 16, 1910.
Graphische Lösung von Randwertaufgaben der Gleichung $\Delta u = 0$. Gött. Nachr. 1911.
Radioaktivität der Luft auf offenem Meere. Gött. Nachr. 1911.
Längsschwingungen der Flugmaschine. Zs. f. Flugtechn. 2, 1911.
Astronomische Ortsbestimmung auf See und Luftschiffen. Gött. Nachr. 1912.
The mathematical training of the Physicist in the University. Proc. 5. Int. Math. Congr. 2, 1913 and Jahresber. D. M. V. 21, 1913.
Wie kann man aus 4 Sonnenhöhen den Besteckversetz in der Zwischenzeit finden? Ann. d. Hydrogr. u. marit. Meteor 41, 1913.
Was ist Mathematik? Zs. f. math. u. naturw. Unterr. 45, 1914.
Ueber eine besondere Art von Integralrechnungen. Math. Ann. 75, 1914.
Mathematik und Bildung. Jahresb. D. M. V. 24, 1915.
Die Dimensionen physikalischer Größen. Phys. Zs. 17, 1916.
Karl Schwarzschild. ib. 17, 1916.
Graphische Auflösung von Gleichungen in der komplexen Zahlenebene. Gött. Nachr. 1917.
Bestimmung eines Kristallsystems durch Röntgenstrahlen. Phys. Zs. 18, 1917.
Woldemar Voigt. Gött. Nachr. 1920.
Woldemar Voigt. Phys. Zs. 21, 1920.
Graphische Methoden der Bahnbestimmung eines Planeten oder Kometen aus drei Beobachtungen. Gött. Nachr. 1921.
Ueber eine Analogie der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in drei Dimensionen. Gött. Nachr. 1921.
Ueber ein neues Bandspectrum des Sauerstoffs. Physika 1, 1921.
Ueber den Segelflug. Naturwiss. 10, 1922.
Vektoranalytische Behandlung der Geometrie und Mechanik. Jahrb. D. M. V. 31, 1922.
Ueber die Gravitation ruhender Massen. Math. Ann. 85, 1922.
Theory of Lyman Ghotts. Journ. Opt. Soc. Amer. 6, 1922.
Bemerkungen über die Spectra der Alkalien. Naturwiss. XI, 1923.
Erwiderung zum Aufsatz von F. Paschen »Zur Kenntnis des Kombinationsprinzipes. Naturwiss. XI, 1923.
Ueber die Theorie der Geister bei Gitterspectren. Verh. d. d. phys. Ges. (3), 4, 1923.
Ueber die sogenannten Geister der Spektralgitter. Ann. d. Phys. (IV), 71, 1923.
Graphische Integrationsmethoden. Zs. f. techn. Phys. 5, 1924.
Isotopes of Mercury and Bismuth and the Satellites of their Spectral Lines. Nature 113, 1924.
Zum Paschen-Baek-Effekt. Ann. d. Phys. (IV), 76, 1925.
Hugo von Seeliger. Gött. Nachr. 1925.
Aether und Relativitätstheorie. Naturwiss. 13, 1925.
Friedrich Paschen. Naturwiss. 13, 1925.
Persönliche Erinnerungen an Karl Weierstraß. Jahresb. D. M. V. 35, 1926.

Gemeinsam mit W. Grotrian:

Die sogenannten Cyanbanden. Phys. Zs. 15, 1914.

Gemeinsam mit J. Precht:

Das Bunsenflammenspektrum des Radiums. Ann. d. Phys. (IV), 10, 1903.
Ueber das Funkenspektrum des Radiums. I—II. Ann. d. Phys. (IV), 12, 1903.
The flame spectrum of radium. Astrophys. J. Chicago 17, 1903.
Die Wärmeabgabe des Radiums. Berl. Akad. (1903.)
Die Stellung des Radiums im periodischen System nach seinem Spektrum. Phys. Zs. 4, 1903.
The position of Ra in the periodic system accordung to its spectrum. Phil. Mag. 5, 1903. Astrophys. J. Chicago 17, 1903.
Magnetische Zerlegung der Ra-Linien. Berl. Akad. 1904.

Gemeinsam mit F. Paschen:

Ueber das Spectrum des Heliums. Berl. Akad. 1895.
Oxygen in the san. Astrophys. J. Chicago 4, 1896.
Serienspectra von Sauerstoff, Schwefel und Selen. Ann. d. Phys. (III), 61, 1897.
Ueber das Zeemansche Phänomen. Berl. Akad. 1900.
Studium des Zeemaneffekts im Quecksilberspektrum. Phys. Zs. I, 1900.
Beiträge zur Kenntnis der Linienspektra. Ann. d. Phys. (IV), 5, 1901.
Ueber die Zerlegung einander entsprechender Serienlinien im magnetischen Felde. Berl. Akad. 1902.
Sauerstoff in der Sonne. Phys. Zs. 14, 1910.

Gemeinsam mit R. Mehmke:

Künftige Ziele der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Zs. f. Math. u. Phys. 46, 1907.

Gemeinsam mit L. Prandtl:

Das Institut f. angew. Mathematik und Mechanik (an der Universität Göttingen). Zs. f. Math. u. Phys. 54, 1907.

Gemeinsam mit H. Kayser:

Ueber die Spectren der Elemente. I—VII. Berl. Akad. 1888 bis 1893.
Ueber die im galvanischen Lichtbogen auftretenden Bandenspectren der Kohle. Wied. Ann. 38, 1889.
Ueber die Spectren der Alkalien. ib. 41, 1890.
On the spectra of alkalies. Phil. Mag. 30, 1890.
Ueber die Spectra der Elemente der zweiten Mendelejeffschen Gruppe. Wied. Ann. 43, 1891.
On the line spectra of the elements of Mendelejeffs second group. Phil. Mag. 31, 1891.
Ueber die Spectra von Kupfer, Silber und Gold. Wied. Ann. 46, 1892.
Ueber die Spectra von Aluminium, Indium und Thallium. ib. 48, 1893.
Ueber die ultrarothen Spectren der Alkalien. ib. 48, 1893.
Ueber die Dispersion der Luft. ib. 50, 1893 und Berl. Akad.
Ueber die Spektren von Zinn, Blei, Arsen, Antimon, Wismouth. ib. 52, 1894.
Beiträge zur Kenntnis der Linienspectra. ib. 52, 1894. 820

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Programmgemäß fand die Hauptversammlung der Gesellschaft in Bad Kissingen vom 20. bis 22. September d. J. statt. Gemeinsam mit der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, der Deutschen Gesellschaft für Technische Physik und der Deutschen Mathematiker-Vereinigung war am Sonntag, den 18. September im Kleinen Kursaal ein Begrüßungsabend veranstaltet worden. Am 19. September vormittags wurden die Gesellschaften in der Eröffnungssitzung des Physikertages durch die Vertreter der Behörden begrüßt. Die Fachsitzungen der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik begannen Dienstag, den 20. September vormittags. Die Vortragsfolge wurde ankündigungsgemäß eingehalten bis auf den von Hrn. Grübler angekündigten Vortrag über den Gewichtsbegriff, der wegen Erkrankung des Vortragenden ausfallen mußte. An seiner Stelle hielt Hr. Prof. H. Reißner ein Referat über den gegenwärtigen Stand der Bestrebungen zur einheitlichen Festlegung der Bezeichnungen und Begriffe »Gewicht und Masse«. An das Referat schloß sich eine eingehende Aussprache, die zu einer Fühlungnahme zwischen der von der Gesellschaft eingesetzten Kommission[1]) und dem Vertreter des AEF, Hrn. Prof. Wallot führte.

Die Fachsitzungen waren durchwegs von etwa 60 bis 80 Mitgliedern und Gästen besucht. Die folgende Uebersicht gibt die Reihe der gehaltenen Vorträge und die Namen der Diskussionsredner. Eine Wiedergabe sämtlicher Vorträge teils in kurzen Auszügen, teils in vollem Wortlaut wird im nächsten Heft der Zeitschrift erscheinen.

[1]) Vergl. diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 246.

Erste Sitzung.

Dienstag, den 20. September vorm.

Vorsitzende: Hr. Reißner-Charlottenburg und Hr. Körner-Prag.

W. Prager-Darmstadt: Die Formänderungen von Raumfachwerken. — Aussprache: v. Mises, Reißner, Prandtl.
Th. Pöschl-Prag: Zur Theorie des Druckversuchs für zylindrische Körper. — Aussprache: Nádái, Reißner, Prandtl.
R. v. Mises-Berlin: Bemerkungen zur Hydrodynamik. — Aussprache: Prandtl.
A. Betz-Göttingen: Propellerfragen. — Aussprache: Reißner, Föttinger, Körner.
L. Prandtl-Göttingen: Vorführung eines hydrodynamischen Films.

Zweite Sitzung.

Dienstag, den 20. September nachm.

Vorsitzende: Hr Hamel-Berlin und Hr. Grammel-Stuttgart.

O. Föppl-Braunschweig: Angenäherte Berechnung von Schwingungszahlen mit Hilfe des Seilpolygons. — Aussprache: Grammel, Weber, v. Mises.
F. Bernstein-Göttingen: Die numerische Ermittlung verborgener Periodizitäten. — Aussprache: Reißner, Prüfer, Prandtl, Gumbel, Ostrowski, Weber.
H. Pollaczek-Geiringer-Berlin: Theorie der Statistik seltener Ereignisse. — Aussprache: Bernstein, Gumbel, v. Mises.
E. J. Gumbel-Heidelberg: Das Zufallsgesetz des Sterbens. — Aussprache: Herzberger, v. Neumann, Fraenkel, Pollaczek-Geiringer.
H. Reißner-Charlottenburg: Ueber ein Normenblatt »Gewicht und Masse«. — Aussprache: Hamel, Witting, Prandtl, Melchior, Wallot, Reißner, v. Mises.

Dritte Sitzung.

Mittwoch, den 21. September vorm.

Vorsitzende: Hr. v. Mises-Berlin und Hr. Baldus-Karlsruhe.

K. Popoff-Sofia: Die Integrale der Differentialgleichungen als Funktion der auftretenden Parameter betrachtet und ihre Bedeutung für die Mechanik. — Aussprache: v. Mises, Blumenthal.
G. Hamel-Berlin: Ueber eine mit dem Problem der Rakete zusammenhängende Aufgabe der Variationsrechnung. — Aussprache: Reißner, Kölzer, Funk.
F. Noether-Breslau: Ueber Magnetfelder in Transformatoren.
F. Rehbock-Berlin: Problemstellung einer linearen darstellenden Geometrie. — Aussprache: Baldus, Pollaczek-Geiringer.
M. Herzberger-Wetzlar: Ueber die bestmögliche, optisch realisierbare Abbildung durch nicht homozentrische Bündel großer Apertur. — Aussprache: Baldus, Prange, Pollaczek-Geiringer, Jaentsch, Lihotzki.

An diese Sitzungen schloß sich noch Donnerstag, den 22. September vormittags eine

Sitzung der Gesellschaft für technische Physik, zu der die Mitglieder unserer Gesellschaft eingeladen waren. Es sprachen:

G. Sachs-Berlin: Festigkeitseigenschaften von Metallkristallen.

A. Smekal-Wien: Sichtbarmachung der Molekularvorgänge in geformten Steinsalzkristallen.

A. Smekal-Wien: Elektrizitätsleitung und die elektrische Festigkeit isolierender Jonenkristalle.

H. Föttinger-Berlin: Die Entwicklung der Vektor-Integratoren zur maschinellen Lösung von Potential- und Wirbelproblemen.

F. Weinig-Berlin: Schnellkonvergierende graphische Lösungen von Strömungsproblemen durch Integralgleichungen.

W. Hort-Berlin: Neuere technische Spannungsmesser für Brückenuntersuchungen.

S. Erk-Berlin: Zähigkeitsmessungen und Untersuchung von Viskosimetern in der Phys. Techn. Reichsanstalt.

In der Geschäftssitzung der Gesellschaft am 21. September gedachte der Vorsitzende, Hr. Prandtl, zunächst der im abgelaufenen Jahr verstorbenen Mitglieder: Hofrat Prof. Dr. E. Blaschke (math. Statistik) in Wien, Prof. Dr. E. Waelsch (darst. Geometrie) in Brünn, Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. C. Runge (angew. Mathematik) in Göttingen, und Hofrat Prof. Dr. E. Müller (darst. Geometrie) in Wien. Nach dem Bericht des Geschäftsführers, Hrn. v. Mises, ist die Mitgliederzahl seit dem Beginn des Geschäftsjahres von 263 auf 323 gestiegen. Eine zweite Ortsgruppe der Gesellschaft wurde in Göttingen errichtet. Die Berliner Ortsgruppe hat sieben, die Göttinger zwei Versammlungen abgehalten. Hr. Trefftz berichtet über die erfolgte Kassenprüfung, die mit einem Saldo von 249,03 M am 1. Okt. 1926 abschloß. Die Versammlung erteilt Entlastung. Auf Vorschlag des Vorsitzenden wird für die satzungsgemäß ausscheidenden Ausschußmitglieder S. Finsterwalder und O. Mader, Prof. Dr. L. Föppl-München und Prof. Dr. G. Prange-Hannover gewählt. Zu Kassenprüfern werden die Herren Prof. Dr. Schwerin-Berlin und Prof. Dr. Trefftz-Dresden wiedergewählt. Der Mitgliedsbeitrag wird in der bisherigen Höhe von 2 M jährlich beibehalten. Als Ort der nächsten Jahresversammlung wird nach eingehender Aussprache Hamburg gewählt, wo die nächste Versammlung Deutscher Naturforscher und Aerzte stattfindet. Dem Vorstand bleibt es überlassen, eine Sondertagung in Dresden im Zusammenhange mit der Jahrhundertfeier der Technischen Hochschule zu veranstalten. Für 1929 wird die Abhaltung der Jahresversammlung in Prag in Aussicht genommen.

Ernst Abbe-Gedächtnispreis für Mathematik und Physik. Der von der Carl Zeiß-Stiftung begründete Ernst Abbe-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen und physikalischen Wissenschaften und deren Anwendungsgebiete sowie die mit dem Preise verbundene Abbe-Medaille kommt Ende des Jahres 1928 zum ersten Male für Anwendungsgebiete der Mathematik und Physik zur Vergebung. Das Preisgericht wird von den Herren Hecker-Jena, Prandtl-Göttingen, Zenneck-München gebildet.

Der erste mathematische Preis wurde 1924 Felix Klein für seine »Mathematischen Werke« zuerkannt, der erste physikalische Preis 1926 Prof. Wilhelm Wien-München, »Einem Meister der Theorie und des Experiments«.

Persönliches. Am 1. September starb in Wien Herr Hofrat Dr. Emil Müller, o. Prof. der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule.

Prof. Dr. H. Mohrmann in Basel ist als o. Prof. der darstellenden Geometrie an die Technische Hochschule in Darmstadt berufen worden.

Zum o. Prof. der Mathematik (Nachfolger von A. Krazer) an der Technischen Hochschule in Karlsruhe ist der bisherige Professor der Mechanik Dr.-Ing. Kurt v. Sanden ernannt worden.

Den Lehrstuhl für Mechanik in der allgemeinen Abteilung der Techn. Hochschule Dresden (Nachfolge von K. Wieghardt) hat Hr. Prof. Dr. E. Trefftz, bisher in der mechan. Abteilung, übernommen. 830

ZUSCHRIFT AN DEN HERAUSGEBER

Zusatz zu der Arbeit von Th. Pöschl, **»Zur Theorie der zylindrischen Schalen und Bogenträger«**, dieser Band, S. 189 bis 198.

Herr C. Weber-Dortmund hatte die Freundlichkeit, mir mitzuteilen, daß sich die Ergebnisse meiner Arbeit verschärfen lassen, insofern, als sich die von mir nur angenähert festgestellte Uebereinstimmung der Werte von S und N in der angenäherten und genauen Theorie für übereinstimmende Randbedingungen als exakte Gleichheit nachweisen läßt; und ferner, daß die Werte der Biegemomente G in beiden Fällen nur um Glieder von der Ordnung h^2/R^2 voneinander abweichen. Die Zahlenangaben im letzten Abschnitte meiner Arbeit sind dementsprechend zu berichtigen.

Prag, 26. September 1927.

Th. Pöschl. 825

(Redaktionsschluß 10. Oktober 1927.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.